Eléments d'analyse

Limites

Exercice 1 [00227] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et on désire établir

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell$$

a) Pour $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geqslant A$:

$$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

b) Conclure en écrivant

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \ell = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 [00228] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$$

en commençant par étudier le cas $\ell = 0$.

Exercice 3 [00230] [correction]
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) + f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$$

Montrer que

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$$

Exercice 4 Mines-Ponts MP [02812] [correction]
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x/2)}{\sqrt{x}} = 1$$

Trouver un équivalent simple en 0 de f.

Exercice 5 [03223] [correction]
Montrer que lorsque $x \to +\infty$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$$

Développements limités

Exercice 6 [00231] [correction]
Déterminer les développements limités suivants :

a) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

b) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cos x}$

c) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{1/x}$

d) $DL_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1}$

Exercice 7 [00232] [correction]
Former le DL à l'ordre 3 en 0 de $\arctan(\mathrm{e}^x)$.
Quelle à l'allure de cette fonction autour de ce point ?

Exercice 8 [00233] [correction]
Exprimer le développement limité général en 0 de $\arcsin x$.

Exercice 9 [00234] [correction]
Former le DL à l'ordre 3 en 0 de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Prolonger le DL à l'ordre 5 en exploitant

$$\tan(\arctan x) = x$$

Prolonger le DL à l'ordre 7 en exploitant

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

Exercice 10 Mines-Ponts MP [02818] [correction]
Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

a) Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.
b) On note g l'application réciproque de $f_{\restriction I}$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

Etude asymptotique d'application réciproque

Exercice 11 [00237] [correction]
On pose $f(x) = x + \ln x - 1$ pour $x > 0$.
a) Prouver que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
b) Former le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0.
c) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y \to +\infty$.
d) Quelle est l'allure de la branche infinie de f^{-1} en $+\infty$?
e) Donner un équivalent simple à $f^{-1}(y)$ quand $y \to -\infty$.

Exercice 12 [00238] [correction]
Montrer que $x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de 0 une fonction réciproque. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de celle-ci.

Exercice 13 [00239] [correction]
Soit $f : [e, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

a) Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ vers un intervalle à préciser.
b) Déterminer un équivalent simple à f^{-1} en $+\infty$.
c) Réaliser un développement asymptotique à trois termes de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 14 [03228] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0$$

a) Montrer l'existence de $a > 0$ tel que f est strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$.
b) On pose

$$b = \min\{f(-a), f(a)\}$$

Montrer que pour tout $\lambda \in [0, b]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-a, 0]$ et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, a]$.
c) Déterminer les limites puis des équivalents de $x_1(\lambda)$ et de $x_2(\lambda)$ quand $\lambda \to 0^+$.
d) On suppose maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^3$. Etudier la limite quand $\lambda \to 0^+$ de

$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda}$$

Exercice 15 [03230] [correction]
Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x} e^x$
a) Montrer que l'équation

$$f(x) = \lambda$$

admet deux solutions $a(\lambda) < b(\lambda)$ pour λ assez grand.
b) Déterminer

$$\lim_{\lambda \to +\infty} b(\lambda)^{a(\lambda)}$$

Continuité des fonctions réelles

Exercice 16 Centrale MP [00246] [correction]
La fonction $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 17 [00245] [correction]
Existe-t-il une fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels ?

Exercice 18 [00241] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$.
a) On suppose que f est continue. Montrer que f admet un point fixe.
b) On suppose que f est croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 19 [00242] [correction]
Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues vérifiant

$$f \circ g = g \circ f$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 20 Mines-Ponts MP [02813] [correction]
Soient f et g des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.
a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
b) Montrer l'existence de $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 21 Centrale MP [00563] [correction]
Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels de $[0, 1]$ de limite 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

Dérivation des fonctions réelles

Exercice 22 [00251] [correction]
Calculer la dérivée $n$ème de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 23 [00253] [correction]
Soit $f : x \mapsto \arctan x$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 24 Mines-Ponts MP [02811] [correction]
Soient des réels a, b où $a \notin \{0, 1\}$. On pose $h(x) = ax + b$ pour tout x réel. On note S l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f \circ f = h$$

a) Montrer que $S = \emptyset$ si $a < 0$.
Désormais on suppose $a > 0$ (et $a \neq 1$).
b) Montrer que h est une homothétie ; préciser son centre et son rapport.
c) Soit $f \in S$. Montrer que $h^{-1} \circ f \circ h = f$. En déduire une expression de f ; on commencera par le cas $0 < a < 1$.

Exercice 25 Mines-Ponts MP [02819] [correction]
On pose $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0) = 0$.
a) Montrer l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que :
$\forall x \in \mathbb{R}^\star$, $f^{(n)}(x) = x^{-3n}P_n(x)f(x)$. Quel est le degré de P_n ?
b) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.
c) Montrer que toute racine de P_n est réelle.

Exercice 26 [00248] [correction]
[Théorème de Darboux]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
a) Montrer que f' prend toutes les valeurs intermédiaires entre

$$f'(a) \text{ et } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

b) Conclure que f' prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 27 X MP [00257] [correction]
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Etudier l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \int_0^{\lambda x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est une fonction réelle continue de la variable réelle

Théorème de Rolle

Exercice 28 [00261] [correction]
a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples avec $n = \deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est lui aussi scindé.
b) Montrer que le résultat perdure même si les racines de P ne sont pas simples.

Exercice 29 [00262] [correction]
On pose $f : x \mapsto \left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$.
a) Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n.
b) Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
c) Montrer que f possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 30 [00266] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annulant une infinité de fois. Montrer qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Exercice 31 [00264] [correction]
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des valeurs d'annulation de f.
Montrer que pour tout $x_0 \in [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ vérifiant

$$f(x_0) = \frac{(x_0-a_1)(x_0-a_2)\ldots(x_0-a_n)}{n!} f^{(n)}(c)$$

On pourra, lorsque cela est possible, introduire K tel que

$$f(x_0) = \frac{(x_0-a_1)\ldots(x_0-a_n)}{n!} K$$

et établir que la dérivée $n$ème de $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{n!}K$ s'annule.

Exercice 32 [00265] [correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
a) Montrer que

$$\forall x_0 \in [a,b]\,, \exists \xi \in]a,b[\,, f(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(\xi)$$

b) En déduire que

$$\sup_{[a,b]} |f| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{[a,b]} |f''|$$

Exercice 33 Mines-Ponts MP [02820] [correction]
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et a,b,c trois points distincts de I.
Montrer

$$\exists d \in I, \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d)$$

Théorème des accroissements finis

Exercice 34 [00267] [correction]
Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 35 Mines-Ponts MP [02815] [correction]
Soient f un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_{k,n})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que :

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\}\,, \frac{k-1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n} \text{ et } \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 36 Mines-Ponts MP [02822] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable.
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Si $|f'(x)| \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Intégration sur un segment

Exercice 37 [00272] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < c < \frac{b-a}{2}$ et

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter

$$g(t) = \int_a^b f(t-x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 38 [02601] [correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On désire établir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)\,|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
a) Vérifier le résultat pour une fonction f constante.
b) Observer le résultat pour une fonction f en escalier.
c) Etendre enfin le résultat au cas où f est une fonction continue par morceaux.

Exercice 39 [02640] [correction]
[Inégalité d'entropie]
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I intervalle non singulier.
a) Etablir que pour tout $a, x \in I$ on a l'inégalité

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$$

b) Soit $f : [0, 1] \to I$ continue. Etablir que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t$$

c) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et d'intégrale sur $[0, 1]$ égale à 1.
Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\ln(f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

d) Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, strictement positives et d'intégrales sur $[0, 1]$ égales à 1.
Montrer que

$$\int_0^1 f(t)\ln f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 f(t)\ln g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 40 Centrale MP [02469] [correction]
Soit (x_k) une suite de $[0, 1]$ équirépartie :

$$\forall [a, b] \subset [0, 1]\,,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}\left\{k \in [\![1, n]\!] \mid x_k \in [a, b]\right\} = b - a$$

a) Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1])\,,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

b) Pour $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, créer, à l'aide de Maple, un programme calculant

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Créer un programme qui réalise la méthode des rectangles. Comparer ces deux programmes avec la valeur donnée par Maple.
c) Adapter la méthode aléatoire au calcul de

$$\iint_{[0,1]^2} \cos(xy)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Exercice 41 X MP [02942] [correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, concave et vérifiant $f(0) = 1$. Etablir

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

Exercice 42 X MP [02977] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite

$$\left(\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}\right)_{n\geqslant 0}$$

Exercice 43 X MP [02981] [correction]
Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

Exercice 44 [03072] [correction]
Résoudre l'équation
$$2^x + 4^{x^2} = 3^x + 3^{x^2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 45 Centrale MP [03181] [correction]
Déterminer un équivalent de
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Intégrale fonction des bornes

Exercice 46 Centrale MP [00087] [correction]
On pourra à tout moment s'aider du logiciel de calcul formel.
a) Résoudre sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle
$$(E) : xy' + y = \frac{1}{\ln x}$$
et expliciter (sous forme intégrale) la solution de (E) sur I, notée f, telle que $f(2) = 0$.
Quel est le résultat obtenu avec le logiciel de calcul formel ?
b) Etudier les variations de f. Vérifier que f admet un maximum en un unique point d'abscisse $x_0 \in I$.
Avec le logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée de x_0.
c) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$. On commencera par établir l'équivalent
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$
d) Déterminer un équivalent de f lorsque $x \to 1^+$.
e) Tracer le graphe de f avec le logiciel de calcul formel.

Exercice 47 Centrale MP [02444] [correction]
Soit
$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$
a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^+$.
c) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 48 [00273] [correction]
On introduit sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction
$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$
a) Prolonger f par continuité en 0.
b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
c) Branches infinies ?

Exercice 49 [00275] [correction]
Soit
$$f : x \in \mathbb{R}^\star \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}t}{t}\,\mathrm{d}t$$
a) Etudier la parité de f. On étudie désormais f sur $]0, +\infty[$.
b) Prolonger f par continuité en 0.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
d) Branches infinies, allure.

Exercice 50 [00277] [correction]
Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
a) Prolonger g par continuité en 0.
b) Montrer que la fonction ainsi obtenue est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51 [00278] [correction]
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $a > 0$. On pose
$$I(x) = \frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a f(t)\,\mathrm{d}t$$
Déterminer la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0.

Calcul d'intégrales

Exercice 52 [00283] [correction]
Calculer
$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 53 [00282] [correction]
Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :
$$\text{a) } \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$\text{b) } \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$$
$$\text{c) } \int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 54 [00285] [correction]
Calculer
$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 55 Centrale MP [02436] [correction]
Calculer
$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 56 [00288] [correction]
Pour $p,q\in\mathbb{N}$, calculer
$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

Exercice 57 [00289] [correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$, posons
$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$$
a) Former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
b) En déduire l'expression de I_n selon la parité de n.

Formules de Taylor

Exercice 58 [00291] [correction]
Etablir que pour tout $x\in[0,\pi/2]$,
$$x-\frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$$

Exercice 59 [00293] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose
$$f(x), f''(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
Montrer que
$$f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 60 [00295] [correction]
En exploitant une formule de Taylor adéquate établir
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Exercice 61 [00296] [correction]
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(0)\neq 0$.
a) Montrer qu'au voisinage de 0, la relation
$$f(x) = f(0) + xf'(\theta x)$$
détermine un réel $\theta\in\,]0,1[$ unique.
b) Déterminer la limite de θ quand $x\to 0$.

Exercice 62 [00297] [correction]
Soient $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k/n^2) - nf(0)$$
Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice 63 Mines-Ponts MP [02816] [correction]
Enoncer et établir la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 64 Mines-Ponts MP [02817] [correction]
Montrer, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, l'existence de $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta_x)$$

Etudier $\lim_{x\to 0} \theta_x$.

Exercice 65 [00255] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$$

a) Montrer que

$$\forall 0 \leqslant p \leqslant n, \varphi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-p})$$

b) On introduit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\forall 0 \leqslant p < n, \psi^{(p)}(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^{n-p-1})$$

En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.
c) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
d) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telles que

$$f(0) = 0, g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } g'(0) \neq 0$$

Montrer que f/g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exercice 66 [03217] [correction]
[Egalité de Taylor-Lagrange]
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors

$$\forall x \in I, \exists c \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Suites numériques

Exercice 67 [00298] [correction]
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :
a) $u_n = \sqrt[n]{n}$ b) $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ c) $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
d) $u_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$ e) $u_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$ f) $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$
g) $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$ h) $u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$.

Exercice 68 [00302] [correction]
Nature de la suite de terme général

$$u_n = \cos(\pi n^2 \ln(1-1/n))$$

Exercice 69 Mines-Ponts MP [02781] [correction]
Etudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)$, où $a > 0$.

Exercice 70 Mines-Ponts MP [02782] [correction]
Soient des réels positifs a et b. Trouver la limite de

$$\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$$

Exercice 71 [00304] [correction]
Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \to +\infty$.

Exercice 72 [00300] [correction]
Soient $a > 0$ et

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$$

a) Montrer que si $a \geqslant 1$ alors $u_n \to +\infty$.
b) On suppose $0 < a < 1$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On pourra exploiter la majoration $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 73 [00320] [correction]
Soient $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}$.
a) Montrer que si $\alpha > 1$ alors $u_n \to 0$ tandis que si $\alpha < 1$, $u_n \to +\infty$.
b) Montrer que si $\alpha = 1$, la suite est monotone et convergente.
c) En exploitant l'encadrement $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ valable pour tout $x \in [0,1[$, établir $u_n \to \ln 2$.

Exercice 74 [00321] [correction]
a) Etablir que pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 75 [00322] [correction]
Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

a) Montrer que $I_n \to 0$ en décroissant.
b) Simplifier $I_n + I_{n+1}$ et en déduire une expression de I_n à l'aide d'un symbole sommatoire.
c) Déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

d) Exploiter

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

pour déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 76 [00324] [correction]
[Irrationalité de e]
On pose pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, montrer que $u_n \to \mathrm{e}$.
c) On suppose que $\mathrm{e} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^\star$. En considérant $q.q!u_q$ et, obtenir une absurdité.

Exercice 77 Centrale MP [00319] [correction]
a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où $p \in \mathbb{N}^\star$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)
b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.
c) Calculer ℓ en utilisant $f(x) = \ln(1+x)$.
d) Si f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ est continue et vérifie $f(0) = 0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n).

Exercice 78 Centrale MP [00323] [correction]
Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2}$$

Exercice 79 Mines-Ponts MP [02788] [correction]
Donner un développement asymptotique de $\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $o(n^{-3})$.

Exercice 80 Centrale MP [02471] [correction]
Soit $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ et $(\mathcal{C})$ le graphe de f.
a) Montrer l'existence d'une suite (x_n) vérifiant :
i) (x_n) est croissante positive.
ii) la tangente à $(\mathcal{C})$ en $(x_n, f(x_n))$ passe par O.
b) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (x_n).

Exercice 81 Centrale PC [03184] [correction]
Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0, 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Théorème de Cesaro

Exercice 82 [00307] [correction]
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On désire établir que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.
a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$.
b) Etablir que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

c) En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne : $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
d) Application : Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to \alpha \neq 0$.
Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 83 [00308] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle.
a) On suppose que (u_n) converge vers ℓ et on considère

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
b) On suppose

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{n} \to \ell$$

Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n^2}$$

Exercice 84 [00309] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.
On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \left]0, +\infty\right[$$

Montrer que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

Exercice 85 [03219] [correction]
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

a) Déterminer la limite de la suite (u_n)
b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

c) En déduire un équivalent de (u_n)

Exercice 86 [03220] [correction]
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \left]0, \pi/2\right[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

a) Déterminer la limite de la suite (u_n)
b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$$

c) En déduire un équivalent de (u_n)

Etude de suite de solutions d'une équation

Exercice 87 [01477] [correction]
Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \ln x + x$$

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$.
b) Former le développement asymptotique de la suite (x_n) à la précision $(\ln n)/n$.

Exercice 88 [00310] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.
b) Déterminer la limite de x_n puis un équivalent simple de (x_n).
c) Donner un développement asymptotique à trois termes de (x_n).

Exercice 89 [00311] [correction]
a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + \mathrm{e}^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n.
c) Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 90 [01478] [correction]
Montrer que l'équation $\tan x = \sqrt{x}$ possède une unique solution x_n dans chaque intervalle $I_n =]-\pi/2, \pi/2[+ n\pi$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$).
Réaliser un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 91 Centrale MP [02478] [correction]
a) Subdiviser $\mathbb{R}^+$ en intervalles contigus disjoints, chacun d'entre eux contenant une unique racine de l'équation $(E) : \tan x \operatorname{th} x = 1$.
b) On range toutes les racines positives de (E) dans une suite strictement croissante $(x_n)_{n\geqslant 0}$.
Evaluer numériquement les quatre premiers termes.
c) Donner un développement asymptotique de x_n.

Exercice 92 Centrale MP [00316] [correction]
Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geqslant 1$. On la note x_n. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 93 Centrale MP [00317] [correction]
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère l'équation $(E_n) : x^n = x + 1$ dont l'inconnue est $x \geqslant 0$.
a) Montrer l'existence et l'unicité de x_n solution de (E_n).
b) Montrer que (x_n) tend vers 1.
c) Montrer que (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

Exercice 94 X MP - Centrale MP [00318] [correction]
Pour $n \geqslant 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1$$

a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.
b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \to +\infty$.
c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

Exercice 95 [00312] [correction]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln x = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
b) Déterminer la limite de x_n.
c) On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln u_n$ puis déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 96 [00314] [correction]
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine x_n dans $]0,+\infty[$. Déterminer $\lim x_n$.

Exercice 97 [00315] [correction]
Montrer que la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$ définit une suite positive (u_n) unique.
Etudier sa convergence et préciser sa limite.

Exercice 98 [03154] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on introduit le polynôme

$$P_n(X) = X(X-1)\dots(X-n)$$

a) Montrer que le polynôme P_n possède une unique racine dans l'intervalle $]0,1[$; celle-ci sera noté x_n.
b) Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P_n'}{P_n}$$

d) En déduire un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Suites récurrentes

Exercice 99 [00328] [correction]
Etudier la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$$

Exercice 100 [00330] [correction]
Soient $a > 0$,

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},..$$

Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 101 [00331] [correction]
Soit

$$f : x \mapsto \frac{x^3+1}{3}$$

et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède trois racines réelles (qu'on n'exprimera pas).
b) Etudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f.
c) Préciser le comportement de (u_n) en discutant selon la valeur de u_0.

Exercice 102 [00332] [correction]
Soient

$$f : x \mapsto \frac{x^3+3ax}{3x^2+a}$$

(avec $a > 0$) et (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier les variations de f, le signe de $f(x) - x$ et en déduire le comportement de (u_n).

Exercice 103 [00333] [correction]
Soient $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

Montrer que (u_n) est monotone de limite nulle. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \text{ et } \prod_{k=0}^n (1-u_k)$$

Exercice 104 [00334] [correction]
Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall x \in [a,b], |f'(x)| < 1$$

a) Montrer que f admet un point fixe unique α.
b) Montrer, pour tout $u \in [a,b]$, la convergence vers α de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = u \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Exercice 105 [00335] [correction]
Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction 1 lipschitzienne et $\alpha \in [a, b]$.
On considère la suite définie par

$$u_0 = \alpha \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

Montrer que (u_n) converge vers un point fixe de f.

Exercice 106 [00329] [correction]
Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in]0, 4[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$$

a) Montrer que (u_n) est bornée. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
b) Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est soit stationnaire égale à 0, soit stationnaire égale à 3.
c) En posant $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$, déterminer les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire.

Exercice 107 [00336] [correction]
Soient $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On considère la suite complexe (z_n) définie par

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

a) Exprimer (z_n) à l'aide d'un produit.
b) Déterminer la limite de (z_n).

Exercice 108 [00338] [correction]
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$$

Montrer que (u_n) converge. On pourra commencer par étudier la monotonie de $v_n = \max(u_{n+1}, u_n)$.

Exercice 109 [00337] [correction]
Soient (u_n) et (v_n) les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 110 [00326] [correction]
Pour $\alpha \in]0, \pi/2]$, on étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = \cos \alpha \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\alpha}{2^k}$$

b) Etudier $\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n$ et en déduire les limites de (u_n) et (v_n).

Exercice 111 Mines-Ponts MP [02783] [correction]
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de réels positifs. On pose, pour tout $n > 0$,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}$$

a) Ici $x_n = a$ pour tout n, où $a > 0$. Etudier la convergence de (y_n).
b) Même question dans le cas où $x_n = ab^{2^n}$ pour tout n, avec $b > 0$.
c) Montrer que (y_n) converge si, et seulement si, la suite $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.

Exercice 112 Centrale MP [02477] [correction]
Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par

$$x_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, x_{n+1} = x_n + n/x_n$$

a) Calculer avec Maple, les 10 premiers termes de la suite pour différentes valeurs de x_1. Commenter.
b) Minorer x_n. Si $(y_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence, étudier $x_n - y_n$. En déduire le comportement asymptotique de (x_n).

Exercice 113 X MP [03165] [correction]
Soient (a_n) une suite réelle positive, bornée et (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la suite (a_n) converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Soit $\varepsilon > 0$, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que
$\forall x \geqslant A, |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Pour $x \geqslant A$ et pour tout $t \in [A, x]$, $|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$ donc
$\left|\frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_A^x |f(t) - \ell|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x-A}{x}\varepsilon \leqslant \varepsilon$.
b) $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell = \frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_A^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t$
Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \frac{C^{te}}{x} \to 0$ donc il existe $A' \in \mathbb{R}^+$ tel que
$x \geqslant A' \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\int_0^A (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ et alors pour $A'' = \max(A, A')$, on a
$x \geqslant A'' \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 2 : [énoncé]
Dans le cas $\ell = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geqslant A, |f(x+1) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Or

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{E(x-A)-1}[f(x-k) - f(x-k-1)] + \frac{1}{x}f(x - E(x-A))$$

donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{E(x-A)}{A}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x - E(x-A))|}{x}$$

Puisque f est continue sur le segment $[A, A+1]$, elle y est bornée par un certain M.
Or $x - E(x-A) \in [A, A+1]$ donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{x}$$

et pour x assez grand

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas général, il suffit d'introduire la fonction $g : x \mapsto f(x) - \ell x$ pour conclure.

Exercice 3 : [énoncé]
Commençons par le cas $\ell = 0$.
On remarque que $(f(t)\mathrm{e}^t)' = (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^t$ donc

$$f(x)\mathrm{e}^x = f(0) + \int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

puis

$$f(x) = f(0)\mathrm{e}^{-x} + \int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t$$

Il reste à montrer

$$\int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}^+$, pour $t \geqslant A$,

$$|f(t) + f'(t)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$\left|\int_A^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\left|\int_0^A (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{e}^{A-x}\int_0^A |f(t) + f'(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi pour x assez grand,

$$\left|\int_0^x (f(t) + f'(t))\mathrm{e}^{t-x}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Finalement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Cas général : il suffit de considérer $g : x \mapsto f(x) - \ell$.

Exercice 4 : [énoncé]
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]0, \alpha\right], (1-\varepsilon)\sqrt{x} \leqslant f(x) - f(x/2) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}$$

Pour $x \in \left]0, \alpha\right]$, $x/2^n \in \left]0, \alpha\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x/2^n} \leqslant f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}} \leqslant f(x) \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1-1/\sqrt{2}}$$

Exercice 5 : [énoncé]
On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\int_0^x \mathrm{e}^{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + C^{te}$$

Quand $x \to +\infty$, sachant que la constante est négligeable devant $\mathrm{e}^{x^2}/2x \to +\infty$, il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = o\left(\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 1$ tel que

$$\forall t \geqslant A, \frac{1}{t^2} \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_A^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \varepsilon\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x 1\,\mathrm{d}t \geqslant x-1 \to +\infty$$

donc pour x assez grand

$$\int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et on peut conclure.

Exercice 6 : [énoncé]
a) $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
b) $\sqrt{3+\cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$
c) $(1+x)^{1/x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 + o(x^2)$
d) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$

Exercice 7 : [énoncé]
$(\arctan \mathrm{e}^x)' = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2(1+x+x^2+o(x^2))} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$ donc
$\arctan \mathrm{e}^x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.
La tangente au point à pour équation $y = \pi/4 + x/2$. La courbe traverse la tangente.

Exercice 8 : [énoncé]
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^{2k} + o(x^{2n})$ avec
$c_k = \frac{(-1)^k\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = (-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$
donc $\arcsin x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

Exercice 9 : [énoncé]
Par opérations

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 5 existe et est de la forme

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 + o(x^5)$$

On a alors

$$\tan(\arctan x) = x + \frac{1}{3}x^3 + ax^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) = x$$

et donc

$$a = \frac{2}{15}$$

Par la formule de Taylor-Young, le développement limité à l'ordre 7 existe et est de la forme

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + bx^7 + o(x^7)$$

En intégrant le développement à l'ordre 6 de $1 + \tan^2 x$ on conclut

$$b = \frac{17}{315}$$

Exercice 10 : [énoncé]

a) f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq \mathrm{e} - 1$.
Le plus grand intervalle cherché est $I =]-1, \mathrm{e} - 1[$ sur lequel f est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, f réalise donc un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I vers $]-\infty, 1/\mathrm{e}[$.
b) On a $\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x))$.
En dérivant $g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x)$.
En dérivant à l'ordre $n \in \mathbb{N}^\star$ et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k+1)}(0)g^{(n-1-k)}(0)$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geqslant 0$.
Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

Exercice 11 : [énoncé]

a) f est continue et strictement croissante. L'étude des limites de f permet d'affirmer que f réalise une bijection $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
b) f est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$. Par suite f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la forme
$f^{-1}(y) = a + by + cy^2 + o(y^2)$. Comme $f(1) = 0$, $f^{-1}(0) = 1$ et donc $a = 1$.
$f(f^{-1}(y)) = y$ donne $1 + by + cy^2 + o(y^2) + \ln(1 + by + cy^2 + o(y^2)) - 1 = y$ soit encore $2by + \left(2c - \frac{1}{2}b^2\right) y^2 + o(y^2) = y$. Par unicité des DL, $b = 1/2$ et $c = 1/16$.
c) Le tableau de variation de f permet de déterminer celui de f^{-1} et d'affirmer $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$.
Puisque $f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$ avec $\ln(f^{-1}(y)) - 1 = o(f^{-1}(y))$ on obtient $f^{-1}(y) \sim y$.
d) $f^{-1}(y)/y \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1$ et $f^{-1}(y) - y = 1 - \ln f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$. f^{-1} présente en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$.
e) On a $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$.
$f^{-1}(y) + \ln(f^{-1}(y)) - 1 = y$ donne $\ln(f^{-1}(y)) = y + 1 - f^{-1}(y)$ puis $f^{-1}(y) = \mathrm{e}^{1+y}\mathrm{e}^{-f^{-1}(y)} \sim \mathrm{e}^{1+y}$.

Exercice 12 : [énoncé]

$f : x \mapsto x + \ln(1 + x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2 > 0$ donc f définie $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 vers un autre. Son application réciproque étant $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un développement limité à l'ordre 3 de la former
$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$.
Puisque $f(f^{-1}(y)) = y$, on a $2ay + \left(2b - \frac{a^2}{2}\right) y^2 + (2c - ab + \frac{1}{3}a^3)y^3 + o(y^3) = y$.
On en déduit $a = 1/2$, $b = 1/16$ et $c = -1/192$.

Exercice 13 : [énoncé]

a) f est continue et

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} > 0$$

sauf en $x = \mathrm{e}$ donc f est strictement croissante et réalise donc une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ vers $[\mathrm{e}, +\infty[$.
b) Quand $y \to +\infty$, $f^{-1}(y) \to +\infty$.

$$\frac{f^{-1}(y)}{\ln(f^{-1}(y))} = y$$

donc

$$\ln(f^{-1}(y)) - \ln(\ln(f^{-1}(y))) = \ln(f^{-1}(y)) + o(\ln(f^{-1}(y))) = \ln y$$

d'où

$$\ln(f^{-1}(y)) \sim \ln y$$

Par suite
$$f^{-1}(y) \sim y \ln y$$
c) $f^{-1}(y) = y\ln(f^{-1}(y)) = y\ln(y\ln y + o(y\ln y)) = y\ln y + y\ln(\ln y + o(\ln y)) = y\ln y + y\ln(\ln y) + o(y\ln(\ln y))$.
puis $f^{-1}(y) = y\ln(f^{-1}(y)) = y\ln(y\ln y + y\ln(\ln y) + o(y\ln(\ln y)) = y\ln(y\ln y) + y\ln\left(1 + \frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)\right)$
et enfin
$$f^{-1}(y) = y\ln y + y\ln(\ln y) + y\frac{\ln(\ln y)}{\ln y} + o\left(y\frac{\ln(\ln y)}{\ln y}\right)$$

Exercice 14 : [énoncé]
a) Puisque f'' est continue et $f''(0) > 0$, on peut introduire $a > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[-a, a]$.
On a alors f' strictement croissante sur $[-a, a]$ et puisque $f'(0) = 0$, on peut exprimer le signe de f' sur $[0, a]$ et constater que f' est strictement décroissante sur $[-a, 0]$ et strictement croissante sur $[0, a]$.
b) Puisque f est continue, par stricte monotonie, f réalise une bijection f_1 de $[-a, 0]$ sur $[0, f(-a)]$ et une bijection f_2 de $[0, a]$ sur $[0, f(a)]$. L'existence et l'unicité de $x_1(\lambda)$ et de $x_2(\lambda)$ en découlent et
$$x_1(\lambda) = f_1^{-1}(\lambda) \text{ et } x_2(\lambda) = f_2^{-1}(\lambda)$$
c) Par continuité de f_1^{-1} et f_2^{-1}, on a
$$\lim_{\lambda\to 0^+} x_1(\lambda) = 0^- \text{ et } \lim_{\lambda\to 0^+} x_2(\lambda) = 0^+$$
Par la formule de Taylor-Young, quand $x \to 0$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 f''(0) + o(x^2)$$
Pour $i \in \{1, 2\}$, puisque $x_i(\lambda) \to 0$,
$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda)f''(0) + o(x_i^2(\lambda))$$
donc
$$x_i^2(\lambda) \sim \frac{2\lambda}{f''(0)}$$
Ainsi
$$x_1(\lambda) \sim -\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} \text{ et } x_2(\lambda) \sim \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}}$$
d) On peut écrire
$$x_i(\lambda) = \pm\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{f''(0)}} + y_i(\lambda) \text{ avec } y_i = o(\sqrt{\lambda})$$
Par la formule de Taylor-Young, quand $\lambda \to 0$
$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{1}{2}x_i^2(\lambda)f''(0) + \frac{1}{6}x_i^3(\lambda)f^{(3)}(0) + o(x_i^3(\lambda))$$
et on obtient
$$y_1(\lambda) \sim -\frac{1}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}\lambda \text{ et } y_2(\lambda) \sim -\frac{1}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}\lambda$$
donc
$$\frac{x_1(\lambda) + x_2(\lambda)}{\lambda} \to -\frac{2}{3}\frac{f^{(3)}(0)}{f''(0)^2}$$

Exercice 15 : [énoncé]
a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ avec
$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x$$
Notons $\alpha < \beta$ les deux racines réelles de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On a le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		α		0^-	0^+		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $\lambda > \max(f(\beta), f(\alpha))$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet deux solutions, l'une dans $a(\lambda) \in]0, \beta[$ et l'autre $b(\lambda) \in]\beta, +\infty[$.
b) On a
$$a(\lambda) = \left(f_{\restriction]0,\beta[}\right)^{-1}(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0^+ \text{ et } b(\lambda) = \left(f_{\restriction]\beta,+\infty[}\right)^{-1}(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} +\infty$$
Puisque $a(\lambda) \to 0$ et
$$\frac{a(\lambda) + 1}{a(\lambda)}\mathrm{e}^{a(\lambda)} = \lambda$$
on a
$$\lambda a(\lambda) = (a(\lambda) + 1)\mathrm{e}^{a(\lambda)} \to 1$$

donc
$$a(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda}$$
Puisque $b(\lambda) \to +\infty$ et
$$\frac{b(\lambda)+1}{b(\lambda)} \mathrm{e}^{b(\lambda)} = \lambda$$
donc
$$\mathrm{e}^{b(\lambda)} \sim \lambda$$
Or $\lambda \to +\infty \neq 1$ donc
$$b(\lambda) \sim \ln \lambda$$
et puisque $\ln \lambda \to +\infty \neq 1$, on a encore
$$\ln b(\lambda) \sim \ln(\ln \lambda)$$
Par suite
$$b(\lambda)^{a(\lambda)} = \mathrm{e}^{a(\lambda)\ln b(\lambda)}$$
avec
$$a(\lambda) \ln b(\lambda) \sim \frac{\ln(\ln \lambda)}{\lambda} \to 0$$
donc
$$b(\lambda)^{a(\lambda)} \to 1$$

Exercice 16 : [énoncé]
Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 17 : [énoncé]
Une telle fonction ne prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs, or si celles-ci n'est pas constante, elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non singulier ce qui constitue un nombre non dénombrable de valeurs. Une telle fonction ne peut donc exister.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Considérons $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue, $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$ donc il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
b) L'ensemble $\{x \in [0,1] \,/\, f(x) \geqslant x\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (0 y appartient) et est majoré (par 1).
On peut donc poser
$$\alpha = \sup \{x \in [0,1] \,/\, f(x) \geqslant x\}$$
Pour $x > \alpha$, on a $f(x) < x$ donc $f(\alpha) \leqslant f(x) < x$. D'où $f(\alpha) \leqslant \alpha$. ($\alpha$ est majorant)
Pour $x < \alpha$, il existe $t \in \,]x, \alpha]$ tel que $f(t) \geqslant t$ donc $f(\alpha) \geqslant f(t) \geqslant t \geqslant x$. D'où $f(\alpha) \geqslant \alpha$. ($\alpha$ est le plus petit majorant).
Finalement $f(\alpha) = \alpha$. On peut aussi procéder par dichotomie...

Exercice 19 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons que $f - g$ ne s'annule pas. Quitte à échanger, supposons $f - g > 0$.
Soit x un point fixe de g.
On a $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$. Donc $f(x)$ est point fixe de g et de plus $f(x) > g(x) = x$.
De même, $f^2(x)$ est point fixe de g et $f^2(x) \geqslant f(x)$.
On peut ainsi construire une suite $(f^n(x))$ de points fixes de g, suite qui est croissante et majorée.
Posons $\ell = \lim f^n(x)$. On a par continuité : $f(\ell) = \ell$ et $g(\ell) = \ell$. Absurde.

Exercice 20 : [énoncé]
a) L'ensemble des points fixes de f est $(f - \mathrm{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0,1]$. Etant fermée et bornée c'est une partie compacte. Etant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.
b) Soient $a \leqslant b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$ donc $a \leqslant g(a), g(b) \leqslant b$. Considérons la fonction continue $\varphi = f - g$. On a $\varphi(a) = a - g(a) \leqslant 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \geqslant 0$ donc φ s'annule.

Exercice 21 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain $x_0 \in [0,1]$.
On a alors
$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0)$$
On en déduit
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0)$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(1) = f(x_0)$$

Ainsi $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $[0,1]$
Un raisonnement symétrique assure aussi que $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $[0,1]$.
On en déduit que f est constante.
La réciproque est immédiate.
Notons que l'hypothèse de stricte croissance de la suite (u_n) est sans doute là pour tromper l'ennemi.

Exercice 22 : [énoncé]
$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$ et $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, $\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ donc $\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(n)} = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$.

Exercice 23 : [énoncé]
$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$ qu'il suffit de dériver à l'ordre n.
Après résolution de l'équation $(x-i)^n = (x+i)^n$, on obtient que les racines de $f^{(n)}$ sont les $\cot\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

Exercice 24 : [énoncé]
a) En dérivant la relation $(f\circ f)(x) = ax+b$ on obtient $f'(x)f'(f(x)) = a$.
On observe que h admet un unique point fixe $\alpha = b/(1-a)$.
Si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) < x$ alors $h(x) = f(f(x)) < f(x) < x$ ce qui est contradictoire avec l'existence d'un point fixe pour h.
De même, on ne peut avoir $f(x) > x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La continuité de f permet alors d'assurer l'existence d'un point fixe à f (qui ne peut d'ailleurs qu'être α car un point fixe de f est aussi point fixe de h).
La relation

$$f'(x)f'(f(x)) = a$$

en $x = \alpha$ donne

$$(f'(\alpha))^2 = a$$

Par suite si $a < 0$, $S = \emptyset$.
b) On observe

$$h(x) = a(x-\alpha) + \alpha$$

h est une homothétie de centre α et de rapport a.
c) On a

$$h^{-1}\circ f\circ h = h^{-1}\circ f\circ f\circ f = h^{-1}\circ h\circ f = f$$

En itérant la relation précédente

$$(h^{-1})^n\circ f\circ h^n = f$$

avec $h^n(x) = \alpha + a^n(x-\alpha)$ et $(h^{-1})^n(x) = \alpha + a^{-n}(x-\alpha)$.
Supposons $a\in\,]0,1[$.
On peut écrire

$$f(x) = ((h^{-1})^n\circ f\circ h^n) = (h^{-1})^n\circ f(\alpha + a^n(x-\alpha))$$

Puisque $a^n\to 0$ et que f est dérivable en α

$$f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + a^n(x-\alpha)f'(\alpha) + o(a^n)$$

donc

$$f(x) = (h^{-1})^n\circ f(\alpha + a^n(x-\alpha)) = \alpha + (x-\alpha)f'(\alpha) + o(1)$$

En passant à la limite quand $n\to+\infty$, on peut affirmer que f est affine. Puisque de plus α est point fixe, f est une homothétie de centre α et son rapport ne peut qu'être $\sqrt{a}$.
Dans le cas $a > 1$, la même étude en partant de

$$h\circ f\circ h^{-1} = f$$

permet aussi d'affirmer que f est affine et d'obtenir la même conclusion.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = (2-3nX^2)P_n + X^3P_n'$. Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n-1)$.
b) f est continue en 0 et pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.
c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.
$f'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que f'' s'annule sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$. Ses annulations sont aussi des zéros de P_2 qui est de degré 2, donc P_2 a toutes ses racines réelles.
f'' s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $]0,+\infty[$ et 2 annulations sur $]-\infty,0[$ qui seront toutes quatre zéros de P_3 qui est un polynôme de degré 4,... on peut itérer la démarche.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit y une valeur strictement intermédiaire à $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - y(x-a)$.
φ est dérivable. $\varphi(a) = f(a)$, $\varphi'(a) = f'(a) - y < 0$, $\varphi(b) = f(b) - y(b-a) > f(a)$.
Puisque $\varphi'(a) < 0$, φ prend des valeurs strictement inférieures à $f(a)$.
Ainsi il existe $\alpha \in]a,b]$ tel que $\varphi(\alpha) < f(a)$.
φ est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre α et b, il existe$x \in]\alpha, b[\in]a,b[$ tel que $\varphi(x) = f(a)$.
En appliquant le théorème de Rolle entre a et x, il existe $c \in]a,x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ i.e. $f'(c) = y$.
Par le même principe que ci-dessus, f' prend aussi les valeurs intermédiaires à $f'(b)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et donc les valeurs intermédiaires à $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 27 : [énoncé]
Nous allons montrer que seule la fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$ du problème posé.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution du problème posé.
On vérifie aisément que f est indéfiniment dérivable et vérifie

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \lambda f(\lambda x)$$

Dans les cas où $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ conclut aisément que f est la fonction nulle.
Dans le cas où $\lambda = -1$, on a $f''(x) = f'(-x) = -f(x)$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et puisque $f(0) = f'(0) = 0$, on obtient encore que f est la fonction nulle.
Cas $|\lambda| < 1$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on $f'(x) = \lambda f(\lambda x)$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, posons

$$M(x) = \sup_{[-x,x]} |f|$$

La fonction M est croissante et

$$M(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} f(0) = 0$$

Pour $x \geqslant 0$

$$|f(x)| \leqslant \int_0^x |f'(t)| \,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^x |f(\lambda t)| \,\mathrm{d}t \leqslant |\lambda| \, x M(|\lambda x|)$$

et on a un résultat semblable pour $x \leqslant 0$.
On en déduit

$$M(x) \leqslant |\lambda| \, |x| \, M(|\lambda x|)$$

En itérant cette relation, on obtient

$$M(x) \leqslant \left[|\lambda|^{(n+1)/2} \, |x|\right]^n M(|\lambda^n x|)$$

et quand $n \to +\infty$ on obtient $M(x) = 0$.
On en déduit que f est constante égale à la fonction nulle.
Cas $|\lambda| > 1$: reste à résoudre... On peut toujours faire référence à X MP 2006 1ère épreuve mais cela ne me semble pas raisonnable pour un jour d'oral...

Exercice 28 : [énoncé]
Soient $a_1 < \ldots < a_n$ les racines de P.
En appliquant Rolle sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient $n-1$ racines réelles distinctes pour le polynôme P'. Puisque $\deg P' = n-1$, ce polynôme est scindé.
Soient $a_1 < \ldots < a_p$ les racines de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leurs multiplicités avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$.
Les $a_1 < \ldots < a_p$ sont racines de P' de multiplicités respectives $\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_p - 1$.
Comme ci-dessus, par Rolle, on peut aussi assurer l'existence de $p-1$ autres racines à P'.
La somme des multiplicités des racines est donc au moins égales à $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i - 1 + p - 1 = n - 1 = \deg P'$ donc P' est scindé.

Exercice 29 : [énoncé]
a) $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ donc $\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ est de degré n.
b)

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \left[(x-1)^n\right]^{(k)}(1) \left[(x+1)^n\right]^{(n-k)}(1) = 2^n n!$$

et de manière similaires $f(-1) = (-1)^n 2^n n!$.
c) 1 et -1 sont racines de multiplicité n de $g : x \mapsto (x^2-1)^n$, 1 et -1 sont donc racines de $g, g', \ldots, g^{(n-1)}$.
En appliquant le théorème de Rolle, on montre que $g', g'', \ldots, g^{(n)} = f$ admettent resp. $1, 2, \ldots, n$ racines dans $]-1,1[$. Puisque f est de degré n, celles-ci sont simples et il ne peut y en avoir d'autres.

Exercice 30 : [énoncé]
Soit (a_n) une suite de valeurs d'annulation deux à deux distinctes de f. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée (a_n) une

sous-suite convergente $(a_{\varphi(n)})$. Posons α sa limite. Par continuité, on a $f(\alpha) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle entre $a_{\varphi(n)}$ et $a_{\varphi(n+1)}$, il existe b_n compris entre ces deux nombres tel que $f'(b_n) = 0$. Quand $n \to +\infty$, on a $b_n \to \alpha$ par encadrement et donc par continuité de f', on a $f'(\alpha) = 0$. Finalement
$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Exercice 31 : [énoncé]
Si $x_0 \in \{a_1, \dots, a_n\}$ n'importe quel c convient.
Si $x_0 \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, il existe une constante K telle que

$$f(x_0) = \frac{(x_0 - a_1)\dots(x_0 - a_n)}{n!}K$$

La fonction $x \mapsto f(x) - \frac{(x-a_1)\dots(x-a_n)}{n!}K$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et s'annule en $a_1, \dots, a_n$ et x_0 ce qui fournit au moins $n+1$ valeurs d'annulation et permet, par le théorème de Rolle, de conclure que sa dérivée $n$ème s'annule en un $c \in]a, b[$. Or

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(f(x) - \frac{(x - a_1)\dots(x - a_n)}{n!}K\right) = f^{(n)}(x) - K$$

donc $K = f^{(n)}(c)$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Si $x_0 = a$ ou $x_0 = b$: ok. Sinon introduisons un réel K tel que la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}K$$

s'annule en x_0.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ et s'annule en $a < t < b$ donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g''(\xi) = 0$ ce qui résout le problème.
b) Notons que les sup engagés existent car les fonctions considérées sont continues sur le segment $[a, b]$.
On a

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leqslant \frac{(x - a)(b - x)}{2}\sup_{[a,b]}|f''|$$

Or $x \mapsto \frac{(x-a)(b-x)}{2}$ est maximum en $x = \frac{a+b}{2}$ ce qui donne :

$$|f(x)| \leqslant \frac{(b - a)^2}{8}\sup_{[a,b]}|f''|$$

puis

$$\sup_{[a,b]}|f| \leqslant \frac{(b - a)^2}{8}\sup_{[a,b]}|f''|$$

Exercice 33 : [énoncé]
Considérons

$$g : x \mapsto (x - b)f(a) + (a - x)f(b) + (b - a)f(x) - \frac{1}{2}(a - b)(b - x)(x - a)K$$

où la constante K est choisie de sorte que $g(c) = 0$ (ce qui est possible).
La fonction g s'annule en a, en b et en c donc par le théorème de Rolle, il existe $d \in I$ tel que $g''(d) = 0$ ce qui résout le problème posé.

Exercice 34 : [énoncé]
En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto x^{1/x}$ entre n et $n+1$, on obtient

$$\sqrt[n+1]{n + 1} - \sqrt[n]{n} = \frac{1 - \ln c}{c^2}$$

avec $c \in]n, n + 1[$.
Puisque $c \sim n \to +\infty$, $\ln c \sim \ln n$ et donc

$$\sqrt[n+1]{n + 1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$$

Exercice 35 : [énoncé]
Appliquons le théorème des accroissements finis à f^{-1} entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$,

$$\exists y_{k,n} \in \left]\frac{k - 1}{n}, \frac{k}{n}\right[, f^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{k - 1}{n}\right) = (f^{-1})'(y_{k,n})\left(\frac{k}{n} - \frac{k - 1}{n}\right)$$

En posant $x_{k,n} = f^{-1}(y_{k,n})$, on a

$$\frac{k - 1}{n} \leqslant f(x_{k,n}) \leqslant \frac{k}{n}$$

En sommant les relations précédentes pour k allant de 1 à n on obtient :

$$f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_{k,n})}\frac{1}{n}$$

car

$$(f^{-1})'(y_{k,n}) = \frac{1}{f'(x_{k,n})}$$

Puisque $f^{-1}(1) = 1$ et $f^{-1}(0) = 0$ car f $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, on obtient finalement,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_{k,n})} = n$$

Exercice 36 : [énoncé]
a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est lipschitzienne donc uniformément continue.
b) Supposons que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x + \alpha) - f(x)| \leqslant 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in]x, x + \alpha[$ vérifiant $|f(x + \alpha) - f(x)| = \alpha |f'(\xi_x)|$ et donc $|f'(\xi_x)| \leqslant 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $|f'(x)| \to +\infty$.

Exercice 37 : [énoncé]
$-c \leqslant t - x \leqslant c \Leftrightarrow t - c \leqslant x \leqslant t + c$.
Si $t \leqslant a - c$ ou $t \geqslant b + c$ alors $g(t) = 0$.
Si $a - c \leqslant t \leqslant a + c$ alors $g(t) = \int_a^{t+c} 1 \,\mathrm{d}x = t + c - a$.
Si $a + c \leqslant t \leqslant b - c$ alors $g(t) = \int_{t-c}^{t+c} 1 \,\mathrm{d}t = 2c$.
Si $b - c \leqslant t \leqslant b + c$ alors $g(t) = \int_{t-c}^{b} 1 \,\mathrm{d}x = b - t + c$.
La fonction g est représentée par une fonction continue affine par morceaux.

Exercice 38 : [énoncé]
a) Supposons f constante égale à C.
$\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = C \int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x$.
Posons $p = \left\lfloor \frac{an}{\pi} \right\rfloor + 1$ et $q = \left\lfloor \frac{bn}{\pi} \right\rfloor$.
$\int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{q\pi}{n}}^{b} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x$
On a $\left|\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\pi}{n}$ donc $\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to 0$ et aussi $\int_{\frac{q\pi}{n}}^{b} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to 0$.
De plus $\sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \frac{(q-p)}{n} \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{2(q-p)}{n} \to \frac{2(b-a)}{\pi}$.
Ainsi $\int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}(b - a)$ puis $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$.
b) Supposons f en escalier.
Soit $a_0, \dots, a_n$ une subdivision adaptée à f.
Par l'étude qui précède, $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f$.
Puis en sommant par la relation de Chasles $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_a^b f$.
c) Supposons enfin f continue par morceaux.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier vérifiant $\|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$.
Puisque $\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi$, pour n assez grand, on a $\left|\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi\right| \leqslant \varepsilon$.
Or $\left|\int_a^b \varphi(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$ et $\left|\int_a^b \varphi - \int_a^b f\right| \leqslant \varepsilon$ donc $\left|\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi} \int_a^b f\right| \leqslant 2\varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon$.
Ainsi $\int_a^b f(x) |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi} \int_a^b f$.

Exercice 39 : [énoncé]
a) φ étant convexe, la courbe est au dessus de chacune de ses tangentes.
b) Posons $a = \int_0^1 f(u) \,\mathrm{d}u \in I$ et considérons $x = f(t) \in I$:
$\varphi(f(t)) \geqslant \varphi(a) + \varphi'(a)(f(t) - a)$
En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \varphi(f(t)) \,\mathrm{d}t \geqslant \varphi\left(\int_0^1 f(u) \,\mathrm{d}u\right)$$

car

$$\int_0^1 \varphi'(a)(f(t) - a) \,\mathrm{d}t = \varphi'(a)\left(\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(u) \,\mathrm{d}u\right) = 0$$

c) $\varphi : x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $I = \mathbb{R}^{+\star}$ car $(x \ln x)' = 1 + \ln x$ qui est croissant.
L'inégalité précédente donne alors

$$0 \leqslant \int_0^1 f(t) \ln(f(t)) \,\mathrm{d}t$$

puisque $\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 1$ annule φ.
d) $x \mapsto x \ln x$ étant convexe et de tangente d'équation $y = x - 1$ en 1, on a $x \ln x \geqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.
Par suite

$$\int_0^1 f(t) \ln f(t) \,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t) \ln g(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} \ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) g(t) \,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right) g(t) \,\mathrm{d}t =$$

Document7

Exercice 40 : [énoncé]
a) La propriété est valable pour les fonctions en escalier et se prolonge aux fonctions continues par approximation uniforme.
b)

```
f:=x->exp(-x^2)
```

```
somme1:=proc(n)
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+f(die()) od; RETURN(S/n);
end;
somme2:=proc(n)
RETURN(sum(f(k/n),k=1..n)/n);
end;
```

La méthode aléatoire donne des résultats instables peu convaincants.
c)

```
g:=(x,y)->cos(x*y)*exp(x^2+y^2);
somme3:=proc(n)
local k,S;
S:=0; for k from 1 to n do S:=S+g(die(),die()) od; RETURN(S/n);
end;
```

Exercice 41 : [énoncé]
Par un argument géométrique (trapèze sous la courbe) la concavité donne

$$x\frac{f(0)+f(x)}{2} \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $xf(x) \leqslant 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x$ donc

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{x=0}^1 \left(\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

Or

$$\int_{x=0}^1\int_{t=0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^1\int_{x=t}^1 f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^1 (1-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$$

La relation (1) donne alors

$$3\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \text{ (2)}$$

Enfin

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

donne

$$2\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \text{ (3)}$$

Les relations (2) et (3) permettent alors de conclure.

Exercice 42 : [énoncé]
On peut écrire

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par le changement de variable $u = t^{n+1}$

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 f(u^{1/(n+1)})\,\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée par $\|f\|_\infty$, on obtient

$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} \to f(1)$$

Exercice 43 : [énoncé]
On a

$$2^n I_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t}\right)^n \mathrm{d}t$$

où l'on remarque que la fonction $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$ croît de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
Introduisons

$$J_n = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \underset{t=\tan x/2}{=} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$$

On sait

$$J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

(via $nJ_nJ_{n+1} = \pi/2$ et $J_n \sim J_{n+1}$, cf. intégrales de Wallis)
Montrons $2^nI_n \sim J_n$ en étudiant la différence

$$2^nI_n - J_n = \int_0^1 \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

On découpe l'intégrale en $1-\varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$ que nous choisirons par la suite.

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{1-\varepsilon_n} \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t + \int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$$

D'une part

$$0 \leqslant \int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon_n \frac{2\varepsilon_n - \varepsilon_n^2}{2} \sim \varepsilon_n^2$$

et d'autre part

$$0 \leqslant \int_0^{1-\varepsilon_n} \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n+\varepsilon_n^2/2}\right)^n$$

avec

$$\left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n+\varepsilon_n^2/2}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}n\varepsilon_n^2 + o(n\varepsilon_n^2)\right)$$

Pour $\varepsilon_n = n^{-1/3}$, on a

$$\int_{1-\varepsilon_n}^1 \frac{1-t^2}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et

$$\left(\frac{1-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n+\varepsilon_n^2/2}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}n^{1/3} + o(n^{1/3})\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On peut alors affirmer

$$2^n I_n - J_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

puis

$$2^n I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$$

et finalement

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^n\sqrt{2n}}$$

Exercice 44 : [énoncé]

L'équation étudiée équivaut à

$$4^{x^2} - 3^{x^2} = 3^x - 2^x$$

Or

$$3^x - 2^x = \int_0^1 x(2+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ et } 4^{x^2} - 3^{x^2} = \int_0^1 x^2(3+t)^{x^2-1}\,\mathrm{d}t$$

et donc l'équation étudiée peut se réécrire

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

où φ est l'application continue définie par

$$\varphi(t) = x(x(3+t)^{x^2-1} - (2+t)^{x-1})$$

Si $x \leqslant 0$ ou si $x \geqslant 1$, il est immédiat d'affirmer que l'application φ est de signe constant.

Si $x \in]0,1[$, l'étude est plus délicate et nous allons montrer par étude de fonctions que

$$x(3+t)^{x^2-1} \leqslant (2+t)^{x-1}$$

soit encore

$$\ln x + (x^2-1)\ln(3+t) \leqslant (x-1)\ln(2+t)$$

Soit $f : x \mapsto \ln x + (x^2-1)\ln(3+t) - (x-1)\ln(2+t)$ définie sur $]0,1]$

La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2x\ln(3+t) - \ln(2+t)$$

Si $x \geqslant 1/2$ alors $f'(x) \geqslant \frac{1}{x} + \ln(3+t) - \ln(2+t) \geqslant 0$.

Si $x \leqslant 1/2$ alors $f'(x) \geqslant 2 - \ln(2+t) \geqslant 2 - \ln 3 \geqslant 0$.

Dans tous les cas $f'(x) \geqslant 0$ et donc f est croissante.

Puisque $f(1) = 0$, la fonction f est négative et l'on obtient l'inégalité proposée.

Finalement, l'équation initialement étudiée équivaut à une équation de la forme

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

avec φ une fonction continue de signe constant. L'équation est donc vérifiée si, et seulement si, φ est la fonction nulle.

Pour $x \leqslant 0$, cette propriété n'est vérifiée que si $x = 0$.

Pour $x > 0$, si la fonction φ est la fonction nulle alors

$$\forall t \in [0,1]\,, \frac{1}{x} + (x^2-1)\ln(3+t) - (x-1)\ln(2+t) = 0$$

puis en dérivant par rapport à la variable t, on obtient

$$\forall t \in [0,1]\,, \frac{x^2-1}{3+t} = \frac{x-1}{2+t}$$

ce qui n'est possible que pour $x = 1$.

Inversement, $x = 0$ et $x = 1$ sont solutions de l'équation étudiée.
Finalement

$$\mathcal{S} = \{0, 1\}$$

Exercice 45 : [énoncé]
Posons $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.
Notons que cette fonction est positive et croissante.
Introduisons $a, b \in]0,1[$ dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x, B_n = \int_a^b (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

Par monotonie de f,

$$0 \leqslant A_n \leqslant \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} = a^{n+1}$$

Pour $a = 1 - \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \to 0$, on a

$$\ln(n)a^{n+1} = \mathrm{e}^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \to 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \to -\infty$$

On en déduit

$$A_n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Par la croissance de f

$$0 \leqslant C_n \leqslant \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1-b^{n+1}}{f(b)}$$

Pour $b = 1 - \eta_n$ avec $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \to 0$, on a

$$b^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Enfin, toujours par la croissance de f,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(b)} \leqslant B_n \leqslant \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1} - a^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Remarque :
Par le changement de variable $t = -\ln(1-x)$, $x = 1 - \mathrm{e}^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et on peut montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(k+1)$$

Ce qui précède permet alors d'établir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n \ln n}$$

Exercice 46 : [énoncé]
a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur I.
La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{x}$$

Par la méthode de la variation de constante, une solution particulière est

$$y(x)=\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

La solution générale est alors

$$y(x)=\frac{1}{x}\left(\lambda+\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)$$

La fonction f recherchée est donnée par

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

La résolution avec Maple

```
dsolve({x*D(y)(x)+y(x)=1/ln(x),y(2)=0},y(x));
```

fait référence à une fonction Ei qui lui est personnelle.
b) La fonction f admet pour dérivée

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{x^2}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=\frac{1}{x^2}g(x)$$

avec

$$g(x)=\frac{x}{\ln x}-\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Par intégration par parties

$$g(x)=\frac{2}{\ln 2}-\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$

Puisque

$$g'(x)=-\frac{1}{(\ln x)^2}<0$$

la fonction g est strictement décroissante, $g(2)>0$ et $\lim\limits_{+\infty} g=-\infty$ donc la fonction g s'annule une unique fois en un $x_0\in I$. Le signe de g puis de f' sont alors immédiats et on peut affirmer que f admet un unique maximum en x_0. On obtient une valeur approchée de x_0 en écrivant

```
fsolve(diff(1/x*int(1/ln(t),t=2..x),x)=0,x);
```

et l'on obtient $x_0=6,579728$ à 10^{-6} près.
c) Par intégration par parties

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}=\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x\ln 2}+\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}$$

Montrons que

$$\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}=o\left(\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\right)\text{ quand }x\to+\infty$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $1/\ln t\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, il existe $x_0\geqslant 2$ tel que

$$\forall t\geqslant x_0,\frac{1}{\ln t}\leqslant\varepsilon$$

et alors

$$\int_{x_0}^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\leqslant\varepsilon\int_{x_0}^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\leqslant\varepsilon\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

De plus, par non intégrabilité d'une fonction positive

$$\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

donc, pour x assez grand

$$\int_2^{x_0}\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}=C^{te}\leqslant\varepsilon\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

et alors

$$0\leqslant\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\leqslant 2\varepsilon\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

On en déduit

$$f(x)\sim\frac{1}{\ln x}-\frac{2}{x\ln 2}\sim\frac{1}{\ln x}$$

Une nouvelle intégration par parties donne

$$\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}=\frac{x}{(\ln x)^2}-\frac{2}{(\ln 2)^2}+2\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^3}$$

Comme ci-dessus, on montre

$$\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^3}=o\left(\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{(\ln t)^2}\right)\text{ quand }x\to+\infty$$

et on en déduit

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln x)^2}\right) \text{ quand } x \to +\infty$$

d) Quand $x \to 1^+$, on peut écrire $x = 1 + u$ avec $u \to 0^+$ et alors

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{\ln(1+s)}$$

Or

$$\frac{1}{\ln(1+s)} = \frac{1}{s} + \frac{s - \ln(1+s)}{s\ln(1+s)}$$

donc

$$\int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{\ln(1+s)} = \ln u + \int_1^u \frac{s-\ln(1+s)}{s\ln(1+s)}\,\mathrm{d}s$$

Grâce à un prolongement par continuité, il y a convergence quand $u \to 0^+$ de l'intégrale du second membre et donc on peut affirmer

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{1}{u} \sim \frac{1}{x-1}$$

e) On obtient le graphe de f par la commande

```
plot(1/x*int(1/ln(t),t=2..x),x=1.5..20);
```

Remarque :
Les questions c) et d) pouvaient aussi être résolues en faisant référence à des résultats de comparaison d'intégrales partielles de fonctions positives non intégrables (résultats hors-programme).

Exercice 47 : [énoncé]
a) La fonction f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0,1[$, on a pour tout $t \in \left[x^2, x\right]$, $2\ln x \leqslant \ln t \leqslant \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2 - x}{2\ln x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2, on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2 I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2$.
b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Quand $x \to 0^+$, $\forall t \in [x, 2x]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^{2x}$ donc $\mathrm{e}^x \ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{2x}\ln 2$. Ainsi $f(x) \to \ln 2$.
De même, quand $x \to 0^-$, $f(x) \to \ln 2$. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln 2$.
b) Soit F une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^t/t$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. F est $\mathcal{C}^1$ et $f(x) = F(2x) - F(x)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}$. Il en est de même sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on peut affirmer que la fonction continue f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1$.
c) Quand $x \to +\infty$, $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x \ln 2$ assure une branche parabolique verticale.
Quand $x \to -\infty$, $\mathrm{e}^{2x}\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x \ln 2$ donne $f(x) \to 0^+$ ce qui donne l'axe (Ox) asymptote, courbe au dessus.

Exercice 49 : [énoncé]
a) Par le changement de variable $u = -t$, on obtient que f est paire.
b) Pour tout $x > 0$, on a

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{\operatorname{ch} x}{t} \leqslant \frac{\operatorname{ch} t}{t} \leqslant \frac{\operatorname{ch} 2x}{t}$$

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{ch} x.\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant \operatorname{ch} 2x.\ln 2$$

et on en déduit

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2$$

c) La fonction $t \mapsto \operatorname{ch}t/t$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc y admet une primitive G et puisque $f(x) = G(2x) - G(x)$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch}2x - \operatorname{ch}x}{x}$$

De plus

$$f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

donc, par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$,f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
d) Puisque $f(x) \geqslant \operatorname{ch} x.\ln 2$, f présente une branche parabolique verticale.

Exercice 50 : [énoncé]
a) $g(x) - f(0) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t) - f(0)\,\mathrm{d}t$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant $|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$.
Par suite, si $|x| \leqslant \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x, $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ puis par intégration, $|g(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$. On pose $g(0) = f(0)$.
b) Par opération, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x}$$

Procédons à une intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t$$

De façon semblable à ce qui précède, on obtient

$$g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}f'(0)$$

Ainsi la fonction continue g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(0) = \frac{1}{2}f'(0)$$

Exercice 51 : [énoncé]
On a

$$I(x) - \frac{f(0)}{a+1} = \frac{1}{x^{a+1}}\left(\int_0^x t^a f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t^a f(0)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a\left(f(t) - f(0)\right)\mathrm{d}t$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, si $|x| \leqslant \alpha$, pour tout t compris entre 0 et x, $|f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ puis par intégration

$$\left|\frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a\left(f(t) - f(0)\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \frac{f(0)}{a+1}$$

Exercice 52 : [énoncé]
$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$.

Exercice 53 : [énoncé]
a) Via $x = \cos t$

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Via $x = \sqrt{t}$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+2x} = \left[\ln(1+2x)\right]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3$$

c) Via $x = 1/t$

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^{1/2}\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_{3/2}^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Exercice 54 : [énoncé]
La fonction $x \mapsto \ln(1+\tan x)$ est définie et continue sur $[0, \pi/4]$ donc I existe.
$\ln(1+\tan x) = \ln(\cos x + \sin x) - \ln(\cos x)$ et $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
Ainsi

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \underset{t=\frac{\pi}{4}-x}{=} \int_0^{\pi/4} \ln\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$I = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Exercice 55 : [énoncé]
On réalise le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ pour lequel $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$.
On obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{2}\arcsin(\sin x)\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

On simplifie $\arcsin(\sin x) = x$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ pour $x \in [\pi/2, 2\pi/3]$.
Enfin on calcule

$$\int_0^{\pi/2} x\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

par intégration par parties.
Au final, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Exercice 56 : [énoncé]
Par intégration par parties, on obtient pour $q \neq 0$

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

Puisque $I_{n,0} = \frac{1}{n+1}$, on obtient

$$I_{p,q} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 57 : [énoncé]
a) Pour $n \geqslant 2$, par intégration par parties (avec $u' = \sin t$ et $v = \sin^{n-1} t$) :

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

b) $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ puis

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 58 : [énoncé]
Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

or

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!}\cos(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^5}{120}$$

donc

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

Exercice 59 : [énoncé]
Par Taylor avec reste intégral

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)| + |f(x+1)| + \max_{x \leqslant t \leqslant x+1} |f''(t)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Exercice 60 : [énoncé]
Considérons la fonction $f : t \to \ln(1+t)$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = 0$,

$$\forall k \geqslant 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$

donc
$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$
Sur $[0,1]$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant n!$ donc l'inégalité de Taylor Lagrange donne
$$\left|f(1)-f(0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leqslant\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$
i.e.
$$\left|\ln 2-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0$$
d'où
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\to\ln 2$$

Exercice 61 : [énoncé]
a) L'existence de θ est assurée par le théorème des accroissements finis. Si deux réels θ et θ' sont solutions distinctes alors, par le théorème de Rolle, f'' s'annule entre θx et $\theta' x$. Or $f''(0)\neq 0$, donc il existe un voisinage de 0 sur lequel f'' ne s'annule pas et sur ce voisinage on a l'unicité de θ.
b) Par la formule de Taylor-Young appliquée à f' :
$$f'(\theta x)=f'(0)+x\theta f''(0)+o(x)$$
En substituant dans la relation initiale, on obtient
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x^2\theta f''(0)+o(x^2)$$
Or la formule de Taylor-Young appliquée à f donne
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2}x^2f''(0)+o(x^2)$$
On en déduit
$$x^2\theta f''(0)+o(x^2)=\frac{1}{2}x^2f''(0)+o(x^2)$$
Sachant $f''(0)\neq 0$, on en déduit $\theta\to 1/2$ quand $x\to 0$.

Exercice 62 : [énoncé]
Par l'inégalité de Taylor Lagrange avec $M=\max\limits_{[0,1]}|f''|$:
$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)-\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leqslant\frac{M}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$
Par suite
$$\left|S_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)\right|\leqslant\frac{M}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\leqslant\frac{M}{2n}\to 0$$
or
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)=\frac{n+1}{2n}f'(0)$$
donc
$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f'(0)/2$$

Exercice 63 : [énoncé]
C'est du cours.

Exercice 64 : [énoncé]
Par l'égalité de Taylor-Lagrange (hors-programme) :
$$\forall x\in\left]0,\pi/2\right[,\exists\xi\in\left]0,x\right[,\sin x=x-\frac{1}{6}x^3\cos(\xi)$$
Le réel $\theta_x=\xi/x$ convient.
A défaut de connaître, l'égalité de Taylor-Lagrange, par l'égalité de Taylor avec reste intégral
$$\sin x=x-\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t$$
Or pour $t\in[0,x]$, on a
$$\cos x\leqslant\cos t\leqslant 1$$
avec inégalité stricte pour $t\in\left]0,x\right[$ donc
$$\frac{x^3}{6}\cos x<\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t<\frac{x^3}{6}$$
Ainsi
$$\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\cos t\,\mathrm{d}t=\lambda\frac{x^3}{6}\text{ avec }\cos x<\lambda<1=\cos 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut écrire

$$\lambda = \cos(x\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in]0,1[$$

Quand $x \to 0$, $x\theta_x \to 0$ donc

$$\cos(x\theta_x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\theta_x^2 + o(x^2)$$

puis

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^5\theta_x^2 + o(x^5)$$

or

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

donc $\theta_x^2 \to 1/10$ puis

$$\theta_x \to \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Exercice 65 : [énoncé]
a) Par la formule de Taylor Young :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + o(x^n)$$

$\varphi(x) = o(x^n)$ entraîne alors $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n)}(0) = 0$.
En appliquant la formule de Taylor Young à $\varphi^{(p)}$, on obtient la conclusion.
b) $x\psi(x) = \varphi(x) = o(x^n)$ donc $\psi(x) = o(x^{n-1})$.
$x\psi'(x) + \psi(x) = \varphi'(x) = o(x^{n-1})$ donc $\psi'(x) = o(x^{n-2})$
$x\psi''(x) + 2\psi'(x) = \varphi''(x) = o(x^{n-2})$ donc $\psi''(x) = o(x^{n-3})$...
Par le théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
c) On introduit

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)\right)$$

On a $\varphi(x) = o(x^n)$ donc ψ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ puis

$$g(x) = \psi(x) + \left(f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}f^{(n)}(0)\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
d)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{x}\frac{1}{g(x)/x}$$

avec $x \mapsto f(x)/x$ et $x \mapsto g(x)/x$ qui se prolongent en 0 en des fonctions de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

Exercice 66 : [énoncé]
Soit $x \in I$
Cas $x = a$
N'importe quel c convient.
Cas $x > a$
Par la formule de Taylor-Laplace

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons

$$m = \min_{[a,x]} f^{(n+1)} \text{ et } M = \max_{[a,x]} f^{(n+1)}$$

On a

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $f^{(n+1)}$, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cas $x < a$
Semblable

Exercice 67 : [énoncé]
a) $u_n = \exp(\ln n/n) \to 1$.
b) $u_n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x + o(1)\right) \to \mathrm{e}^x$.
c) $u_n = \exp\left((n+2)\ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right) = \exp(-2 + o(1)) \to \mathrm{e}^{-2}$.
d) $u_n = -2n^2\sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$.
e) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right) = 1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc
$u_n = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2\alpha + o(1)) \to \mathrm{e}^{2\alpha}$.
f) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{n\ln n} \to \mathrm{e}$.
g) $\sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right) = 1 + \frac{1}{n}\ln 2 + o(1)$, $u_n = \left(1 + \frac{\ln 24}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \sqrt[3]{24}$.
h) $\arctan(n+1) - \arctan n = \frac{1}{1+c^2}$ avec $n \leqslant c \leqslant n+1$ donc
$u_n = \exp\left(n^2\ln\left(1 + \frac{1}{1+c^2}\right)\right) = \exp\left(1 + o(1)\right) \to \mathrm{e}$.

Exercice 68 : [énoncé]
$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^{n+1}\sin(o(1)) \to 0$.

Exercice 69 : [énoncé]
Si $a \in]0,1[$, la suite est constante égale à 0.
Si $a = 1$, la suite est constante égale à 1.
Si $a > 1$ alors $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leqslant a^n$ donne $(a^n - 1)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leqslant a$ et donc, par encadrement, la suite converge vers a.

Exercice 70 : [énoncé]
Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors la suite converge évidemment vers 0. On suppose désormais $a, b > 0$.
On a

$$\frac{1}{2}\left(a^{1/n} + b^{1/n}\right) = 1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n \to \sqrt{ab}$$

Exercice 71 : [énoncé]
$\forall A \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}/u_n < A\}$ est fini car il contient au plus $E(A) + 1$ éléments.
Par suite il possède un plus grand élément N et alors $\forall n \geqslant N + 1, u_n \notin E$ donc $u_n \geqslant A$. Ainsi $u_n \to +\infty$.

Exercice 72 : [énoncé]
a) Si $a \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant 2^n \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.
b) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc (u_n) est croissante. De plus

$$u_n \leqslant \mathrm{e}^a \mathrm{e}^{a^2} \ldots \mathrm{e}^{a^n} = \exp\left(a\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) \leqslant \exp\left(\frac{a}{1 - a}\right)$$

donc (u_n) est majorée et par suite convergente.

Exercice 73 : [énoncé]
a) Si $\alpha > 1$ alors $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n^\alpha + 1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.
Si $\alpha < 1$ alors $u_n \geqslant \frac{n}{n^\alpha + n^\alpha} = \frac{1}{2}n^{1-\alpha} \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.
b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$ donc (u_n) est croissante. De plus $u_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$ donc (u_n) est majorée et par conséquent convergente.
c) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leqslant -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right) = -\ln\frac{n}{2n} = \ln 2$ et
$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geqslant \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) = \ln\frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$ donc $u_n \to \ln 2$.

Exercice 74 : [énoncé]
a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions $x \mapsto \ln(1 + x) - x + \frac{1}{2}x^2$ et $x \mapsto x - \ln(1 + x)$.
b)

$$\ln u_n \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$$

et

$$\ln u_n \geqslant \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} = \frac{n+1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

donc $u_n \to \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 75 : [énoncé]
a)

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to 0$.
De plus, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^n}{x+1} \leqslant \frac{x^{n+1}}{x+1}$$

donc $I_n \leqslant I_{n+1}$.
b)

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k} + (-1)^n I_0$$

c) $I_0 = \ln 2$ et $(-1)^n I_n \to 0$ donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{-k}}{k} + \ln 2 \to 0$$

puis la conclusion.
d) Comme ci-dessus, $J_n \to 0$. De plus

$$J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$J_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{2k+1} + (-1)^n J_0$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{\pi}{4} \to 0$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \to \frac{\pi}{4}$$

Exercice 76 : [énoncé]
a) Aisément (u_n) est croissante (v_n) décroissante et $v_n - u_n \to 0$.
b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M_{n+1} = \sup_{x\in[0,1]} \left|(\mathrm{e}^x)^{(n+1)}\right| = \mathrm{e}$. Pour $x = 1$, on obtient

$$|\mathrm{e} - u_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \to 0$$

donc $u_n \to \mathrm{e}$.
c) Par la stricte monotonie des suites (u_n) et (v_n) on a $u_n < \mathrm{e} < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\star$.
$q.q!u_q$ est un entier et $q.q!v_q$ est l'entier consécutif. Or $q.q!u_q < q.q!\mathrm{e} < q.q!v_q$ donc $q.q!\mathrm{e}$ ne peut être entier. Or $q.q!\mathrm{e} = p.q! \in \mathbb{N}$. Absurde.

Exercice 77 : [énoncé]
a)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \leqslant 0$$

et $u_n \leqslant \frac{np}{n+1} \leqslant p$ donc (u_n) converge.
b) Par le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \{1,\dots,np\}$, il existe $c_{n,k} \in \left]0, \frac{1}{n+k}\right[$ tel que

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right) - f(0) = f'(c_{n,k}) \frac{1}{n+k}$$

On a alors

$$v_n - \ell f'(0) = \sum_{k=1}^{np} \left(f'(c_{n,k}) - f'(0)\right) \frac{1}{n+k}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha]$ on ait $|f'(x) - f'(0)| \leqslant \varepsilon$.
Pour n suffisamment grand pour que $\frac{1}{n+1} \leqslant \alpha$, on a $c_{n,k} \in [0,\alpha]$ et donc $|v_n - \ell f'(0)| \leqslant \varepsilon \ell$.
On en déduit $v_n \to \ell f'(0)$.
c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \to \ln(p+1)$$

On conclut $\ell = \ln p$.
d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \to +\infty$$

Exercice 78 : [énoncé]
Pour $x \in [0,1]$,

$$\left|\sin x - x + \frac{1}{6}x^3\right| \leqslant \frac{1}{120}$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leqslant \frac{1}{120} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^5}{n^{10}} \leqslant \frac{1}{120}\frac{1}{n^4}$$

donc $M_n = o(1/n^3)$.
Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 79 : [énoncé]
On a

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}\leqslant (n-4)\frac{(n-5)!}{n!}=o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice 80 : [énoncé]
a) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ avec

$$I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$$

Pour $x\in\mathcal{D}$, la tangente en $(x,f(x))$ passe par O si, et seulement si, $xf'(x)=f(x)$.
Après transformation, ceci équivaut pour $x>0$ à l'équation

$$x\tan x+\ln(\cos(x))+1=0$$

Posons $\varphi(x)=x\tan x+\ln(\cos(x))+1$.
φ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$. $\varphi'(x)=x(1+\tan^2 x)>0$ sur $\mathcal{D}\cap\mathbb{R}^{+\star}$.
Quand $x\to\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^-$, $\varphi(x)\to+\infty$. Quand $x\to\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^+$, $\varphi(x)\to-\infty$.
$\varphi_{\restriction I_k}$ réalise donc une bijection de I_k vers $\mathbb{R}$ (pour $k\in\mathbb{N}^\star$).
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ avec $x_n=(\varphi_{\restriction I_n})^{-1}(0)$ est solution.
b) Evidemment $x_n\sim 2n\pi$ et donc $x_n=2n\pi+y_n$.
On a

$$\sin y_n=-\frac{\cos y_n(\ln\cos y_n)+\cos y_n}{2n\pi+y_n}$$

avec $|y_n|<\pi/2$
L'étude de la fonction $x\mapsto x\ln x+x$ assure que celle-ci est bornée et donc $\sin y_n\to 0$ puis $y_n\to 0$.
Par suite $\cos y_n\to 1$ donc $\sin y_n\sim-\frac{1}{2n\pi}$ puis $y_n\sim-\frac{1}{2n\pi}$.
On conclut

$$x_n=2n\pi-\frac{1}{2n\pi}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 81 : [énoncé]
Montrons que la suite (u_n) converge vers 0 par l'epsilontique...
Soit $\varepsilon>0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n\geqslant N, 0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\varepsilon$$

et alors pour tout $n\geqslant N$

$$0\leqslant u_{n+1}\leqslant\frac{u_n+\varepsilon}{K}$$

On en déduit

$$0\leqslant u_{n+2}\leqslant\frac{u_n}{K^2}+\frac{\varepsilon}{K^2}+\frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_{n+p}\leqslant\frac{u_n}{K^p}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\varepsilon}{K^i}$$

La suite (u_n) étant majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_{n+p}\leqslant\frac{1}{K^p}+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{K^i}=\frac{1}{K^p}+\frac{\varepsilon}{1-1/K}$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p\leqslant\varepsilon$ et alors

$$0\leqslant u_{n+p}\leqslant\varepsilon+\frac{\varepsilon}{1-1/K}=\lambda\varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

Exercice 82 : [énoncé]
a) C'est la convergence de u_n vers ℓ.
b) Par l'inégalité triangulaire

$$|v_n-\ell|=\frac{1}{n}|(u_1-\ell)+\cdots+(u_n-\ell)|$$
$$\leqslant\frac{|u_1-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n}+\frac{|u_{n_0+1}-\ell|+\cdots+|u_n-\ell|}{n}$$

et on conclut en exploitant $|u_k-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ pour $k>n_0$.
c) Quand $n\to+\infty$,

$$\frac{|u_1-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n}=\frac{C^{te}}{n}\to 0$$

donc pour n assez grand

$$\frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi il existe un rang n_1 au-delà duquel

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

d) On applique le résultat précédent à la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ et on peut affirmer $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \to \alpha$ donc $\frac{1}{n}(u_n - u_0) \to \alpha$ puis $\frac{1}{n}u_n \to \alpha$ et enfin $u_n \sim \alpha n$.

Exercice 83 : [énoncé]
a) Supposons $\ell = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0, |u_n| \leqslant \varepsilon/2$$

On a alors

$$|v_n| \leqslant \left|\frac{u_1 + \cdots + n_0 u_{n_0}}{n^2}\right| + \left|\frac{(n_0+1)u_{n_0+1} + \cdots + n u_n}{n^2}\right| \leqslant \frac{C^{te}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$$

pour n assez grand.
Ainsi $v_n \to 0$.
Cas général : $u_n = \ell + w_n$ avec $\omega_n \to 0$:

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}\ell + \frac{w_1 + \cdots + n w_n}{n^2} \to \frac{\ell}{2}$$

b) On peut écrire

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{(u_n - u_{n-1}) + \cdots + (u_1 - u_0)}{n^2} + \frac{u_0}{n^2}$$

donc

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{n\frac{(u_n - u_{n-1})}{n} + \cdots + \frac{(u_1 - u_0)}{1}}{n^2} + \frac{u_0}{n^2} \to \frac{\ell}{2}$$

Exercice 84 : [énoncé]
On a $\ln u_{n+1} - \ln u_n \to \ln \ell$ donc par Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln u_k - \ln u_{k-1} \to \ln \ell$$

d'où

$$\frac{1}{n}\ln u_n \to \ln \ell$$

puis

$$\sqrt[n]{u_n} \to \ln \ell$$

Exercice 85 : [énoncé]
a) La suite (u_n) est bien définie et à valeur dans $\mathbb{R}^{+\star}$ car

$$\forall x > 0, \ln(1+x) > 0$$

La suite (u_n) est décroissante car

$$\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) \leqslant x$$

La suite (u_n) est aussi minorée par 0 donc convergente.
En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (u_n) tend vers 0.
b)

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{1}{2}$$

car $u_{n+1} \sim u_n$.
c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

puis

$$\frac{1}{n}\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{2}$$

Finalement

$$u_n \sim \frac{2}{n}$$

Exercice 86 : [énoncé]
a) La suite (u_n) est décroissante car

$$\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \leqslant x$$

La suite (u_n) est aussi minorée par 0 donc convergente.
En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (u_n) tend vers 0.
b)

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$

car $u_{n+1} \sim u_n$.
c) Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$

puis

$$\frac{1}{n}\frac{1}{u_n^2} \to \frac{1}{3}$$

Finalement

$$u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$$

Exercice 87 : [énoncé]
a) La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ d'où l'existence de (x_n).
Comme $n \to +\infty$, $x_n = f^{-1}(n) \to +\infty$. Par suite $\ln x_n = o(x_n)$ et $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$.
Donc $x_n = n + o(n)$.
Soit $y_n = x_n - n$. On a :

$$y_n = -\ln x_n = -\ln(n + o(n)) = -\ln n + \ln(1 + o(1)) = -\ln n + o(1)$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + o(1)$$

Soit $z_n = y_n + \ln n$. On a :

$$z_n = -\ln(n - \ln(n) + o(1)) + \ln n = -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\text{Donc } x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 88 : [énoncé]
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
b) $x_n = f^{-1}(n)$ et $f^{-1} \underset{+\infty}{\to} +\infty$ donc $x_n \to +\infty$.
Puisque $\sqrt[3]{x_n} = o(x_n)$, on a $x_n \sim n$.
c) On peut écrire $x_n = n + y_n$ avec $y_n = o(n)$.
Puisque

$$y_n + \sqrt[3]{n + y_n} = 0$$

on a

$$y_n \sim -\sqrt[3]{n}$$

On peut écrire $y_n = -\sqrt[3]{n} + z_n$ avec $z_n = o\left(\sqrt[3]{n}\right)$.
Puisque

$$-\sqrt[3]{n} + z_n + \sqrt[3]{n}(1 + \frac{1}{3}\frac{-\sqrt[3]{n}}{n} + o\left(\frac{\sqrt[3]{n}}{n}\right)) = 0$$

on a $z_n \sim \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$.
Finalement

$$x_n = n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Exercice 89 : [énoncé]
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \mathrm{e}^x$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $f(x_n) = n \leqslant n + 1 = f(x_{n+1})$ donc $x_n \leqslant x_{n+1}$ car f^{-1} est croissante.
Si (x_n) est majorée par M alors $f(x_n) = n \leqslant f(M)$ ce qui est absurde.
La suite (x_n) étant croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
$x_n = o(\mathrm{e}^{x_n})$ donc $\mathrm{e}^{x_n} \sim n \to +\infty \neq 1$ puis $x_n \sim \ln n$.
c) Posons $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$.
On a $y_n + \ln n + n\mathrm{e}^{y_n} = n$ donc

$$\mathrm{e}^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} + \frac{\ln n}{n} \to 1$$

d'où $y_n \to 0$ et

$$\mathrm{e}^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n)$$

On a alors $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$ d'où $ny_n + o(ny_n) = -\ln n$ et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

On écrit $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$ et

$$\mathrm{e}^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$$

Exercice 90 : [énoncé]
Sur I_n, la fonction $f : x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$ est continue, croît strictement de $-\infty$ vers $+\infty$.
Cela assure l'existence et l'unité de x_n.
On a

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

donc $x_n \sim n\pi$.
Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a $\tan y_n = \sqrt{x_n}$ et $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$y_n = \arctan\sqrt{x_n} \to \frac{\pi}{2}$$

Posons

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{x_n} = \arctan\frac{1}{\sqrt{x_n}} = \arctan\frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}}$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi^3 n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Finalement

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \frac{3 + 4\pi}{\pi^{3/2}}\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Exercice 91 : [énoncé]
a) La fonction $x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$ réalise une bijection continue strictement croissante de $I_0 = [0, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}^+$ et de $I_n =]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$ vers $\mathbb{R}$ pour $n \geqslant 1 x \mapsto \tan x \operatorname{th} x$. Dans chaque I_n figure une solution unique x_n à l'équation (E).
b) On résout l'équation dans les intervalles $[n\pi, n\pi + \pi/2[$ pour des valeurs successives de n.

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi),n=0..3);
```

```
c)
```

Puisque $x_n \in I_n$, on a déjà $x_n \sim n\pi$.
Posons $y_n = x_n - n\pi$. On a $y_n \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan y_n \operatorname{th} x_n = 1$ donc $y_n = \arctan\frac{1}{\operatorname{th} x_n}$.
Puisque $x_n \to +\infty$, $\operatorname{th} x_n \to 1$ puis $y_n \to \pi/4$. Ainsi $x_n = n\pi + \pi/4 + o(1)$.
On obtient le développement limité de $x \mapsto \arctan x$ en 1 par

```
series(arctan(x),x=1);
```

On en déduit $y_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\operatorname{th} x_n - 1) + o(\operatorname{th} x_n - 1)$
Or $1 - \operatorname{th} x_n = \frac{2}{\mathrm{e}^{2x_n} + 1} \sim \frac{2}{\mathrm{e}^{2n\pi + \pi/2}}$ donc $y_n - \frac{\pi}{4} \sim -\frac{2}{\mathrm{e}^{2n\pi + \pi/2}}$.
Finalement $x_n = n\pi + \pi/4 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2n\pi + \pi/2}} + o\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2n\pi}}\right)$.
On peut observer la rapide convergence vers 0 de $x_n - n\pi + \pi/4$ en écrivant

```
seq(fsolve(tan(x)*tanh(x)=1,x=n*Pi..Pi/2+n*Pi)-evalf(n*Pi+Pi/4),n=0..3);
```

Exercice 92 : [énoncé]
Posons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n \in \mathbb{R}^+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n \in [0,1]$.
Puisque $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leqslant f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1} \geqslant x_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$, à la limite $\ell \in [0,1]$. Si $\ell < 1$ alors $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n \to 0$ et la relation $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$ donne à la limite $\ell^2 = 1$ ce qui est absurde. On conclut que $\ell = 1$.
Posons $u_n = 1 - x_n$, $(1-u_n)^n = u_n(2-u_n)$ donne $n\ln(1-u_n) = \ln u_n + \ln(2-u_n)$ d'où $-nu_n \sim \ln u_n$ puis $\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$ or $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$ donc $\ln u_n \sim -\ln n$ puis $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$ et enfin $x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}$.

Exercice 93 : [énoncé]
a) Il suffit d'étudier la fonction $f_n : x \mapsto x^n - (x+1)$.
b) $f_n(1) \leqslant 0$ donc $x_n \geqslant 1$. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n+1) = (x_n-1)(x_n+1) \geqslant 0$ donc $x_{n+1} \leqslant x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $\ell \geqslant 1$. Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \geqslant \ell^n \to +\infty$ or $x_n^n = x_n + 1 \to \ell + 1$. Ce qui est impossible et il reste $\ell = 1$.
c) $x^n = x+1 \Leftrightarrow n\ln x = \ln(x+1) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{n}$ avec $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ définie sur $[1,+\infty[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $g'(x) > 0$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[0,1[$, de plus (puisque $g'(x) \neq 0$) g^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc g^{-1} admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $x_n = g^{-1}(1/n)$ admet un développement limité à tout ordre. Formons ses trois premiers termes
$g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$. $a = g^{-1}(0) = 1$. $g(g^{-1}(x)) = x$ donc
$\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x\ln(2 + bx + o(x^2))$ puis
$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$ donc $b = \ln 2$ et $c = \frac{(1+\ln(2))\ln(2)}{2}$.
Finalement $x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1+\ln(2))\ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 94 : [énoncé]
a) P_n réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ vers $[-n,1]$.
b) $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leqslant P_n(x_n) = 0$ donc $x_{n+1} \leqslant x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell \in [0,1]$. Si $\ell > 0$ alors $0 = P_n(x_n) \to -\infty$, c'est absurde. On conclut $\ell = 0$.
c) $\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \to 0$ donc $x_n^n = o(nx_n)$ puis sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $x_n \sim 1/n$.
d) Ecrivons $x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \to 0$.
Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a $\frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} = \varepsilon_n$.
$(1+\varepsilon_n)^n = \exp(n\ln(1+\varepsilon_n)) = \exp(n\varepsilon_n + o(n\varepsilon_n))$.
Or $n\varepsilon_n = n\frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n}$.
Puisque $\varepsilon_n \to 0$, pour n assez grand, $|1+\varepsilon_n| \leqslant 2$ et la relation précédente donne $|n\varepsilon_n| \leqslant \frac{2^n}{n^{n-1}} \to 0$.
On en déduit $n\varepsilon_n \to 0$ puis $(1+\varepsilon_n)^n \to 1$ et enfin $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$.
Finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right)$$

Exercice 95 : [énoncé]
a) Soit $f_n : x \mapsto x^n + \ln x$. On a

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

d'où l'existence et l'unicité de x_n avec en plus la propriété $x_n \in]0,1[$.
b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \ln(x_n) = (1-x_n)\ln(x_n) < 0$$

donc $x_{n+1} \geqslant x_n$. La suite (x_n) est croissante et majorée par 1 donc converge vers $\ell \in]0,1]$.
Si $\ell < 1$ alors

$$0 = x_n^n + \ln x_n \to -\ln \ell$$

car $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n \to 0$.
Ceci est impossible. Il reste $\ell = 1$.
c) $(1-u_n)^n = -\ln(1-u_n) \sim u_n \to 0 \neq 1$
donc $n\ln(1-u_n) \sim \ln u_n$ puis $nu_n \sim -\ln u_n \to +\infty \neq 1$.
$\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$ donc $\ln n = -\ln u_n + \ln(-\ln u_n) + o(\ln(-\ln u_n))$ or $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$ donc $\ln n \sim -\ln u_n$ puis

$$u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 96 : [énoncé]
On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On observe que $f_n(0) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $f'_{n+1} = f_n$. La propriété est vrai pour $n = 1$ et si elle est vrai au rang n, le tableau de signe de f_n permet d'assurer que f_{n+1} est décroissante (et donc strictement négative) sur $[0, x_n]$ puis strictement croissante sur $[x_n, +\infty]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que f s'annule en un $x_{n+1} > x_n$ et celui-ci est unique.
La suite (x_n) est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel ℓ et $\frac{x_n^n}{n!} \to 0$. Or la suite de terme général est $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_n^k}{k!}$ est croissante et strictement

positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite (x_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 97 : [énoncé]
L'étude des variations de la fonction $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$ assure l'exitence et l'unicité de $u_n > 0$ vérifiant la relation $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$. De plus on peut affirmer $u_n \geqslant 1$.
Puisque $u_n^n(n(u_n-1)-1) = 1$ et $u_n^n \geqslant 1$ on a $n(u_n-1)-1 \leqslant 1$ puis
$0 \leqslant u_n - 1 \leqslant 2/n$ permet de conclure $u_n \to 0$.

Exercice 98 : [énoncé]
a) Par application du théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto P_n(t)$ sur chacun des intervalles $[k, k+1]$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$), on obtient que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans chacun des intervalles $]k, k+1[$. Puisque le polynôme P_n' est de degré n, il possède au plus n racines et donc il ne possède pas d'autres racines que celles précédentes. En particulier, le polynôme P_n' possède exactement une racine dans l'intervalle $]0,1[$.
b) On a

$$P_{n+1}(X) = P_n(X)(X-(n+1))$$

En dérivant et en évaluant en x_n on obtient

$$P_{n+1}'(x_n) = P_n(x_n)$$

D'une part

$$(-1)^n P_n(x_n) = x_n \prod_{k=1}^{n} (k - x_n)$$

est une quantité positive.
D'autre part, l'expression

$$(-1)^n P_{n+1}(x) = x(x-1) \prod_{k=2}^{n+1} (k-x)$$

est négative sur $[0,1]$. On en déduit ses variations sur $[0,1]$ puis le signe de sa dérivée sur ce même intervalle. Puisque qu'elle est négative sur $[0, x_{n+1}]$ et positive sur $[x_{n+1}, 1]$, on obtient

$$x_{n+1} \leqslant x_n$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.

c) Puisque les racines de P_n sont exactement les $0, 1, \ldots, n$ et puisque celles-ci sont simples, on obtient

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X-k}$$

d) Sachant $F_n(x_n) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$$

Puisque $0 \leqslant x_n \leqslant x_0 \leqslant 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_0} \leqslant \frac{1}{1-x_0} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$$

Ainsi

$$\ln n + O(1) \leqslant \frac{1}{x_n} \leqslant \ln(n-1) + O(1)$$

et on peut conclure

$$x_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

Exercice 99 : [énoncé]
Si (u_n) converge sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 + \ell^2/4$ d'où $\ell = 2$.
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2$ donc (u_n) est croissante.
Si $u_0 > 2$ alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
Si $u_0 \in [0,2]$ alors on vérifie aisément que (u_n) est majorée par 2 et on conclut $u_n \to 2$.

Exercice 100 : [énoncé]
$u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante. Par récurrence montrons $u_n \leqslant a+1$. La relation est vraie pour $n = 1$ et l'hérédité s'obtient par
$u_{n+1} = \sqrt{a + u_n} \leqslant \sqrt{2a+1} \leqslant a + 1$.

Exercice 101 : [énoncé]
a) Il suffit de dresser le tableau de variation de f. On note $\alpha < \beta < \gamma$ ces trois racines.
b) f est croissante et

x		α		β		γ	
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

c) $u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ donc $u_0 \leqslant f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ croissante.
De même $u_n \geqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$ donc $u_0 \geqslant f(u_0) \Rightarrow (u_n)$ décroissante.
Les seules limites finies possibles pour (u_n) sont α, β, γ.
Enfin si $u_0 \leqslant \alpha$ (resp. β, γ) alors pour tout n, $u_n \leqslant \alpha$ (resp. β, γ) et de même pour $\geqslant$.
Au final on peut conclure :
$u_0 \in]-\infty, \alpha[$ donne (u_n) décroissant vers $-\infty$.
$u_0 = \alpha$ donne (u_n) constante égale à α.
$u_0 \in]\alpha, \gamma[$ donne (u_n) convergeant vers β.
$u_0 = \gamma$ donne (u_n) constante égale à γ.
$u_0 \in]\gamma, +\infty[$ donne (u_n) croissant vers $+\infty$.

Exercice 102 : [énoncé]
$f'(x)$ est du signe de $3(x^2 - a)^2$ donc f est croissante et par suite (u_n) est monotone.
Les racines de l'équation $f(x) = x$ sont $0, \sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Ce sont les seules limites possibles pour (u_n).
$f(x) - x$ est du signe de $ax - x^3 = -x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.
Si $u_0 \in]0, \sqrt{a}]$ la suite est croissante est majorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$
Si $u_0 \in [\sqrt{a}, +\infty[$ la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 103 : [énoncé]
$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ donc (u_n) est croissante. Aisément, on montre que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc on peut conclure que (u_n) converge. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ d'où $\ell = 0$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \to u_0$$

et

$$\prod_{k=0}^{n} (1 - u_k) = \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \to 0$$

Exercice 104 : [énoncé]
a) Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
g est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$ donc g s'annule en un point α qui est alors point fixe de f.
Si α et β sont deux points fixes distincts alors par application du théorème des accroissements finis, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 1$ ce qui est incompatible avec les hypothèses.
b) La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle y admet donc un maximum en un point $c \in [a, b]$ et en posant $k = |f'(c)|$ on a

$$\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leqslant k \text{ avec } k \in [0, 1[$$

Par l'inégalité des accroissements finis, f est k lipschitzienne et alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant k^n |u - \alpha| \to 0$$

d'où le résultat.

Exercice 105 : [énoncé]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(f(u_n) - f(u_{n-1})) + (u_n - u_{n-1})}{2}$$

Puisque f est 1 lipschitzienne on a

$$|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant |u_n - u_{n-1}|$$

donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $u_n - u_{n-1}$,
(en fait la fonction itératrice est croissante).
Par suite (u_n) est monotone et étant bornée elle converge vers un $\ell \in [a, b]$.
La relation

$$u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}$$

donne à la limite

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}$$

donc $f(\ell) = \ell$.

Exercice 106 : [énoncé]
a) On observe que $x \mapsto 4x - x^2$ est une application de $[0, 4]$ dans lui-même. Par suite $u_n \in [0, 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) converge alors, en posant ℓ sa limite, on a $\ell = 4\ell - \ell^2$ d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 3$.
b) Supposons que $u_n \to 0$. S'il existe un rang n tel que $u_n = 0$ alors la suite (u_n) est stationnaire égale à 0. Sinon on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_{n+1} - u_n \sim 3u_n > 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite est strictement

croissante. De même si $u_n \to 3$ sans être stationnaire égale à 3, on observe que la suite $|u_n - 3|$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.
c) On obtient aisément $u_n = 4\sin^2 2^n\alpha$. La suite est stationnaire si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ ou 3 i.e. $\sin^2(2^n\alpha) = 0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3/2}$ soit encore $2^n\alpha = k\pi/3$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi les u_0 pour lesquels la suite est stationnaire sont les $\sin(k\pi/3.2^n)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 107 : [énoncé]
a) $z_1 = \frac{\rho e^{i\theta}+\rho}{2} = \rho\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$. Par ce principe :

$$z_n = \rho\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

b) $e^{i\frac{\theta}{2^n}} \to 1$ et

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}} \to \frac{\sin\theta}{\theta}\ (\text{ou } 1 \text{ si } \theta = 0)$$

Finalement $z_n \to \frac{\sin\theta}{\theta}$.

Exercice 108 : [énoncé]
On a $u_n \leqslant v_n$ et $u_{n+1} \leqslant v_n$, $v_{n+1} = \max(u_{n+2}, u_{n+1})$ avec
$u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \leqslant v_n$ et $u_{n+1} \leqslant v_n$ donc (v_n) est décroissante.
(v_n) est décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.
On a $u_{n+1} \leqslant v_n$.

$$v_{n+1} \leqslant \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n), u_{n+1}\right) = \max\left(\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n), \frac{1}{2}(u_{n+1}+u_{n+1})\right) = \frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n$$

donc $2v_{n+1} - v_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$ donc (u_n) converge vers la même limite que (u_n).

Exercice 109 : [énoncé]
Les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et à termes positifs.
Sachant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

on a $\forall n \geqslant 1, u_n \leqslant v_n$ puis $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont respectivement croissante et décroissante et on a $\forall n \geqslant 1, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
Par convergence monotone, (u_n) et (v_n) convergent vers des limites ℓ et ℓ'.
En passant la relation $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ à la limite on obtient $\ell = \ell'$.

Exercice 110 : [énoncé]
a) Exploiter $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ et raisonner par récurrence.
b)

$$\sin\frac{\alpha}{2^n}v_n = \frac{1}{2^n}\sin\alpha$$

via $\sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a$. Par suite

$$v_n \sim \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)} \to \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

et aussi

$$u_n \to \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Exercice 111 : [énoncé]
Notons que la suite (y_n) est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.
a) Ici $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$. Soit ℓ la racine positive de l'équation $\ell^2 - \ell - a = 0$ i.e.

$$\ell = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

On remarque que $y_1 = \sqrt{a} \leqslant \ell$ et on montre par récurrence $y_n \leqslant \ell$. La suite (y_n) est croissante et majorée donc convergente.
b) On observe que la nouvelle suite (y_n) est désormais égale à b fois la précédente, elle est donc convergente.
c) Si (y_n) converge vers ℓ alors $x_n^{2^{-n}} \leqslant y_n \leqslant \ell$ donc $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée.
Si $(x_n^{2^{-n}})$ est bornée par une certain M alors $x_n \leqslant M^{2^n}$, la suite (y_n) définie par (x_n) est alors inférieure à celle obtenue par (M^{2^n}), cette dernière étant convergente, la suite (y_n) converge.

Exercice 112 : [énoncé]
a) Définissons une procédure récursive calculant les termes de la suite

```
x:=proc(n,x1)
local y;
if n=1 then RETURN(x1) else y:=x(n-1,x1); RETURN(y+(n-1)/y); fi
end;
```

On peut alors évaluer les termes de la suite pour différentes valeurs de x_1

```
x1:=5;seq(evalf(x(k,x1)),k=1..10);
```

On remarque que (x_n) tend vers $+\infty$ et on peut même présumer $x_n \sim n$.
On remarque aussi que pour $x_1 = 1$ on a $x_n = n$ ce qu'on justifie aisément par récurrence.
b) La suite proposée est bien définie et à termes dans $]0, +\infty[$.
En exploitant $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, on peut affirmer $x_{n+1} \geqslant 2\sqrt{n}$ donc $x_n \geqslant 2\sqrt{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On en déduit $x_n \to +\infty$.
Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = x_n - y_n$, quitte à échanger éventuellement les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ pour que $u_2 = x_2 - y_2 \geqslant 0$.
On a

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{n}{x_n y_n}\right) u_n$$

Or pour $n \geqslant 2$,

$$1 - \frac{n}{x_n y_n} \geqslant 1 - \frac{n}{4(n-1)} > 0$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 2}$ décroissante. La suite (u_n) est donc convergente et par conséquent $x_n \sim y_n$.
Puisque pour $y_1 = 1$, on obtient $y_n = n$, on peut affirmer $x_n \sim n$.

Exercice 113 : [énoncé]
Posons

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

On vérifie aisément que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{M+2} \leqslant u_n \leqslant 1$$

Supposons la convergence de la suite (u_n). Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant u_{n+1} en fonction de u_n, on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1$$

On en déduit que la suite (a_n) converge.
Inversement, supposons que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ, $\ell \geqslant 0$.
Considérons la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On vérifie que la suite (v_n) est bien définie et à termes strictement positifs.
L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine $L > 0$ et on a

$$|v_{n+1} - L| \leqslant \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite (v_n) converge vers L. Considérons ensuite la suite (α_n) définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leqslant k\left(|\alpha_n| + |a_n - \ell|\right)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0, 1[$$

où $m > 0$ est un minorant de la suite convergente (v_n).
Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leqslant k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque la suite (a_n) converge vers ℓ, il existe p_0 tel que

$$\forall p \geqslant p_0, |a_p - \ell| \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Pour n assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leqslant \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leqslant \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leqslant 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}$$

Ainsi $\alpha_n \to 0$ et par conséquent

$$u_n \to L$$

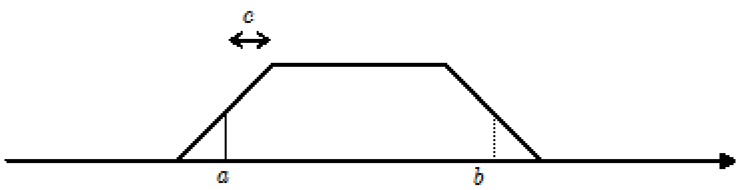

FIGURE 1 – La fonction g

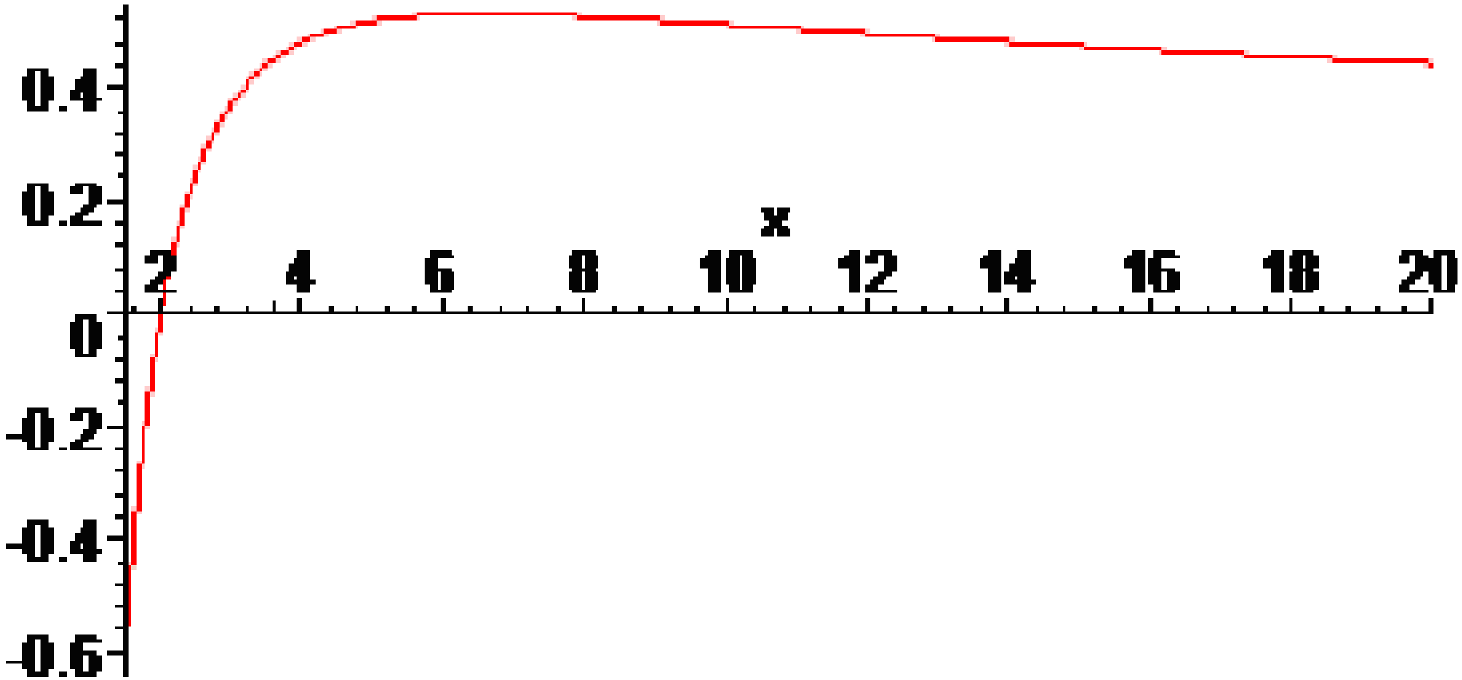

FIGURE 2 – Le graphe de f